Spojité deterministické modely II – náměty pro kolokvium
Jarní semestr 2020

1. Parciální diferenciální rovnice prvního řádu: model věkově strukturované populace

1. Uvažujme populaci jedinců, rozmnožujících se dělením. Předpokládejme, že každý jedinec, který se dožije věku a_0 se rozdělí. Předpokládejme dále, že specifická úmrtnost je lineární funkcí věku, $\mu(a) = \mu_0 + \alpha a$.

   a) Najděte věkově specifickou porodnost této populace.

   b) Určete podmínky, za jakých může taková populace dlouhodobě přežívat.

   c) Určete průběh stabilizované struktury populace φ a určete čas, za jaký se velikost populace zdvojnásobí.

2. Odložená plodnost
   Uvažujme populaci, v níž ženy začínají být plodné ve věku a_m, jejich plodnost končí ve věku a_M a maximální plodnosti $b_{\max}$ dosahují ve věku a_F; přitom samozřejmě platí $a_m < a_F < a_M$. Na intervalech (a_m, a_F) a (a_F, a_M) je věkově specifická porodnost lineární. Specifická úmrtnost je od věku a_m do věku a_M konstantní a rovna hodnotě μ_0. Určete závislost růstového koeficientu na hodnotě a_F.

3. „Břímě polygamie“
   Představme si hypotetickou populaci, v níž se každý muž žení ve čtyřiceti letech a bere si dvě manželky ve věku dvacet let. Předpokládejme dále, že úmrtnost mužů a žen je stejná a nezávisí na věku, porodnost žen je ve věku 20–40 let konstantní, jinak je nulová, poměr novorozených chlapečků a holčiček je 1. Může taková populace dlouhodobě přežívat? Určete věkovou strukturu φ v závislosti na hodnotách porodnosti a úmrtnosti.

4. „Požehnání senescence“
   Uvažujte věkově strukturovanou populaci, v níž specifická porodnost je po částech konstantní funkce (od narození do dospělosti nula, pak nějaká kladná konstanta až do smrti nebo do nějakého věku menopauzy). Uvažujte konstantní úmrtnost a úmrtnost Gompertzovskou, obě se stejným „poločasem přežití“.

   a) Při kterém z uvažovaných tvarů úmrtnosti je větší růstový koeficient λ? Jinak řečeno: je výsledkem evoluce (přežívání nejzdatnějších, tj. maximalizace λ) spíše populace, v níž se stárne (s věkem se ztrácí síly a zdraví, naopak se získává schopnost zemřít i na banální infekci), nebo populace stálého mládí.

   b) Jak se změní výsledek, pokud je plodnost časově omezená (po menopauze vymizí) nebo celoživotní.

2. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu: model populace v prostoru

1. J. G. Skellam v roce 1951 studoval šíření dubů od konce poslední doby ledové. Zformuloval předpoklady:

   (i) Duby se množí s růstovým koeficientem $\alpha > 0$ a do okolního prostředí se šíří difúzí s difuzivitou $D > 0$.

   (ii) Dub žije a produkuje žaludy nejméně 60 let.

   (iii) I v panenském prostředí má jeden dub nejvýše 9 milionů plodných potomků.

   (iv) Střední kvadratická vzdálenost žaludů od stromu je nejvýše 50 metrů (střední kvadratická vzdálenost je odmocnina z průměru druhých mocnin vzdálenosti všech žaludů od mateřského stromu).

   a) Napište rovnici pro vývoj populační hustoty dubů na základě předpokladu (i).

   b) Za pomoci zbývajících předpokladů najděte horní odhady parametrů D a α. [Můžete předpokládat, že na počátku času byl jediný dub v počátku souřadnic místa.]

   c) Ověřte hypotézu, že duby se v Británii rozšířily difúzí podle uvedených předpokladů. Duby se od poslední doby ledové (za nejvýše 20 000 let) rozšířily na vzdálenost zhruba 1 000 km.

2. Uvažujte rovnici reakce-difúze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2(1-u),$$

   definovanou pro $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Napište obyčejnou diferenciální rovnici pro řešení ve tvaru putující vlny $U = U(z)$, tj.

$$z = x - ct, \quad U(x-ct) = u(t,x), \quad \lim_{z\to-\infty} U(z) = 1, \quad \lim_{z\to\infty} U(z) = 0.$$

   b) Najděte minimální rychlost c putující vlny.

   c) Pokuste se najít počáteční podmínku takovou, aby počáteční úloha pro uvažovanou rovnici byla explicitně řešitelná.

3. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu: modely morfogeneze

1. Uvažujte rovnici reakce-difúze
$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(w)$$
pro neznámou funkci $w = w(\tau, \xi)$ definovanou pro $\tau > 0$, $0 < \xi < L$, s Dirichletovou okrajovou podmínkou
$$w(\tau, 0) = w(\tau, L) = u^*.$$
Přitom $u^* \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že $f(u^*) = 0$.

   a) Změňte měřítko časové proměnné τ i prostorové proměnné ξ tak, aby se rovnice transformovala na rovnici
   $$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma^2 f(v)$$
   s Dirichletovou okrajovou podmínkou
   $$v(t, 0) = v(t, \pi) = u^*.$$

   b) Odvoďte linearizovanou rovnici
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 f'(u^*)u \qquad (1)$$
   s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou
   $$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \qquad (2)$$

   c) Řešte úlohu (1), (2) s počáteční podmínkou
   $$u(0, x) = u_0(x) = \sin x.$$

   d) Nechť $f'(u^*) > 0$. Rozhodněte, zda zvětšení difuzivity D nebo velikosti L systém stabilizuje nebo destabilizuje.

2. Uvažujte vektorovou rovnici reakce-difúze
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = D\Delta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$$
definovanou na oblasti $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x^2 + y^2 < (a + \delta)^2\}$. (Tato rovnice může být považována za model růstu chapadel u nezmara.) Parametr δ považujte za tak malý, že rozdíl koncentrací $\boldsymbol{u}$ při změně souřadnic x, y o vzdálenost nepřevyšující δ je zanedbatelný.

   Najděte podmínky, za jakých má řešení rovnice n lokálních extrémů v oblasti Ω. (Takové řešení popisuje nezmara s n chapadly.)

4. Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním

1. Jeden z modelů růstu populace velryby grónské (používaný International Whaling Commision) je zapsán rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu N(t) + \mu N(t-T)\left\{1 + q\left[1 - \left(\frac{N(t-T)}{K}\right)^z\right]\right\},$$

kde μ — úmrtnost,
q — maximální možný nárůst porodnost oproti úmrtnosti,
K — kapacita prostředí,
T — doba k dosažení dospělosti,
z — míra citlivosti populace na její velikost (tj. vnitrodruhovou konkurenci).

Všechny parametry jsou kladné.
Ukažte, že rovnice popisující vývoj malých odchylek od rovnovážné velikosti populace je

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} \approx -\mu n(t) - \mu(qz-1)n(t-T)$$

a stabilita rovnovážného stavu je tedy určena reálnou částí řešení λ rovnice

$$\lambda = -\mu\left[1 + (qz-1)\,\mathrm{e}^{-\lambda T}\right].$$

Odvoďte, že rovnovážný stav je stabilní, pokud

$$\mu T < \mu T_c = \frac{\pi - \cos^{-1}\frac{1}{b}}{\sqrt{b^2-1}}, \qquad b = qz - 1 > 1$$

a stabilní pro libovolné T, pokud $b < 1$.

2. Růst populace strukturované na jedince juvenilní a plodné lze modelovat následující rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_0 N(t-\tau)\mathrm{e}^{-\gamma N(t-\tau)} - \mu N(t),$$

kde $N = N(t)$ — velikost populace v čase t,
β_0 — maximální porodnost,
μ — úmrtnost,
$\mathrm{e}^{-\gamma N}$ — míra zmenšení porodnosti způsobená vnitrodruhovou konkurencí populace velikosti N.

- Najděte netriviální rovnovážnou velikost populace. Linearizujte rovnici v okolí rovnovážného stavu.
- Najděte hranice oblastí v rovině $(\mu\tau, \beta_0\tau)$, ve kterých malé odchylky od rovnovážného stavu
  (a) monotonně rostou,
  (b) monotonně klesají,
  (c) oscilují s klesající amplitudou,
  (d) oscilují s rostoucí amplitudou.

(Uvedený model použil R. May v roce 1975 k modelování populace *Lucila cuprina* a ukázal dobrou shodu s daty naměřenými Nicholsonem roku 1957.)