16.B Funkce – základní pojmy a vlastnosti

Základní pojmy:

- **uspořádaná dvojice** [x,y] – je dvojice, v níž záleží na pořadí (je-li $x \neq y$, pak $[x,y] \neq [y,x]$)
- **kartézský součin** $A \times B$ **-** je množina *všech* uspořádaných dvojic [x,y], kde $x \in A$ a $y \in B$.
  Tedy $A \times B = \{[x,y];\ x \in A \wedge y \in B\}$

- **binární relace –** je libovolná podmnožina kartézského součinu

- **zobrazení z množiny A do množiny B -** je taková binární relace, která každému $x \in A$ přiřazuje *nejvýš jedno* $y \in B$

- **funkce –** je zobrazení z **R** do **R** (neboli zobrazení v **R**)
  f: y = f(x) **f** … označení (jméno) funkce
  y = f(x) …funkční předpis, neboli rovnice funkce
  x … argument funkce - nezávisle proměnná
  y … hodnota funkce - závisle proměnná

- **definiční obor funkce D(f) –** je množina všech $x \in R$, k nimž existuje $y \in R$ tak, že $[x; y] \in f$.
  Tedy $D(f) = \{x \in R;\ \exists y \in R : [x,y] \in f\}$

- **obor funkčních hodnot H(f) –** je množina všech $y \in R$, k nimž existuje $x \in R$ tak, že $[x; y] \in f$.
  Tedy $H(f) = \{y \in R;\ \exists x \in R : [x,y] \in f\}$

- **graf funkce –** je množina všech bodů X[x, f(x)], kde $x \in D(f)$

- **inverzní funkce –** se vytvoří z funkce dané vzájemnou výměnou *x* za *y* a naopak.
  Je-li daná funkce f: y = f(x) s definičním oborem D(f) a s oborem funkčních hodnot H(f), pak k ní inverzní je funkce f^{-1}: x = f(y), tedy po úpravě f^{-1}: y = $f^{-1}(x)$, pro kterou $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$.
  Pozn. 1. – relace inverzní k dané funkci f je funkcí pouze tehdy, je-li f prostá.
  Pozn. 2. – grafy funkce dané a funkce k ní inverzní jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu soustavy souřadnic (tedy podle přímky p: y = x).

Způsoby zadání funkce:

- **výčtem prvků (tabulkou)**
- **rovnicí (analyticky)**
- **graficky**
- **slovním popisem**

Základní vlastnosti funkce:

1) monotónnost - vlastnost označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu konstantní, rostoucí, klesající, nerostoucí, či neklesající

Nechť $M \subseteq D(f)$.

- fce *f* je *rostoucí* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- fce *f* je *neklesající* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- fce *f* je *klesající* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- fce *f* je *nerostoucí* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Pozn. 1: *„ryze monotónní“ fce* je souhrnný název pro rostoucí a klesající funkce
„monotónní“ fce je souhrnný název pro neklesající (tedy i rostoucí) a nerostoucí (tedy i klesající) funkce

Pozn. 2: Každá ryze monotónní fce je zároveň prostá. !Obrácená věta neplatí!

2) sudost a lichost – některé funkce jsou symetrické, podle druhu symetrie rozlišujeme funkce sudé a liché

- fce f je *sudá* právě tehdy, když
  1. $\forall x \in D(f): -x \in D(f)$
  2. $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

  graf sudé funkce je souměrný podle osy y
- fce f je *lichá* právě tehdy, když
  1. $\forall x \in D(f): -x \in D(f)$
  2. $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

  graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic

3) omezenost

Nechť $M \subseteq D(f)$.

- fce f je *omezená zdola* v M $\Leftrightarrow \exists d \in R: \forall x \in M: f(x) \geq d$
- fce f je *omezená shora* v M $\Leftrightarrow \exists h \in R: \forall x \in M: f(x) \leq h$
- fce f je *omezená v M*, je-li v M omezená shora i zdola

Pozn.: fce je omezená, je-li omezená v celém svém definičním oboru

4) extrémy (tento pojem je zaveden pro funkce, které jsou alespoň částečně omezené)

Nechť $M \subseteq D(f)$, $a \in M, b \in M$.

- fce f má v bodě *a minimum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) \geq f(a)$
- fce f má v bodě *a ostré minimum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) > f(a)$
- fce f má v bodě *b maximum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) \leq f(b)$
- fce f má v bodě *b ostré maximum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) < f(b)$

Zápis: $f(a) = \min_{x \in M} f(x)$ $\quad f(b) = \max_{x \in M} f(x)$

5) prostá funkce

fce f *prostá* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

6) periodičnost

funkce f se nazývá *periodická* právě tehdy, když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že platí:

1. $\forall x \in D(f): x + p \in D(f)$

2. $\forall x \in D(f): f(x+p) = f(x)$

p … perioda funkce

Pozn. 1: základní perioda funkce = nejmenší kladná perioda

Pozn. *2*: graf periodické funkce se pravidelně periodicky opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě

Pozn. 3: typickým a současně velmi významným příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce