28.B Kombinatorika

Kombinatorika je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice, $k \in N$).

Kombinatorická pravidla

- **Kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby, ..., k-tý člen po výběru všech předchozích n_k způsoby, je roven číslu p, pro které platí :

$$\boxed{p = n_1 \,.\, n_2 \,.\, \dots \,.\, n_k}$$

- **Kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, přičemž každé dvě z nich jsou disjunktní, pak platí:

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Skupiny, v nichž záleží na pořadí prvků

Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ,

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou ($k, n \in N$, $k \leq n$).

počet všech popsaných variací: $V_{(k,\, n)} = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Variace k-té třídy z n prvků s opakováním

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát ($k, n \in N$).

počet všech popsaných variací: $V'_{(k,\, n)} = n^k$

Permutace z n prvků bez opakování = variace n-té třídy z n prvků bez opakování

- představuje každou uspořádanou **n**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje právě jednou.

počet všech popsaných permutací: $P_{(n)} = V_{(n,\, n)} = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .1 = n!$

Pozn.: n! …. čteme n faktoriál

Permutace k prvků s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathbf{N}$, $k > n$)

– představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

Nechť se v uspořádané **k**-tici první prvek vyskytuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát, třetí prvek k_3-krát, ..., n-tý prvek k_n-krát. Přitom $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

počet všech popsaných permutací s opakováním: $P'_{k1,\, k2,\, \ldots,\, kn}(k) = \dfrac{k!}{k_1!.k_2!\ldots k_n!}$

Skupiny, v nichž nezáleží na pořadí prvků

Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou ($k, n \in N$, $k \leq n$).

počet všech popsaných kombinací: $K_{(k,\, n)} = \dfrac{V_{(k,n)}}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$ čteme „n nad k“

Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše **k**-krát.

počet všech popsaných kombinací:	$K'_{(k,\,n)} = \binom{n+k-1}{k}$

<u>Pravidla pro práci s kombinačními čísly a faktoriály:</u>

<u>Faktoriál n!</u>

Pro každé **n** přirozené: $n! = n.(n-1).(n-2).\ ...\ .2.1$

Pro n = 0 definujeme: $0! = 1$

<u>Kombinační číslo</u> $\binom{n}{k}$

Pro všechna n, k celá nezáporná, $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Některé základní vlastnosti kombinačních čísel:

1) $\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{0}{0} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pro $k \leq n$

3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pro $k < n$.