31.B Typy matematických vět a základní metody jejich důkazů

Matematika nepřipouští plané řeči o pojmech, jejichž smysl není jasně a jednoznačně stanoven.

Každý matematický pojem musí být přesně definován.

Každá **matematická teorie** musí obsahovat:

1. ***Základní pojmy*** – ty se nedefinují, pouze jsou vysvětleny pomocí představ a příkladů (z něčeho se vyjít musí) – je jich jen omezené množství (např. pro planimetrii – bod, přímka, rovina)
2. ***Axiomy*** – jasně vymezené vztahy mezi základními pojmy (o jejich pravdivosti se nepochybuje) (např. pro planimetrii – Daným bodem lze vést s danou přímkou jedinou rovnoběžku)
3. ***Definice*** – představují přesné vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo pojmů dříve definovaných (např. v definici kružnice k(S; r) = $\{X \in \pi_2 ; |XS| = r\}$ jsou použity základní pojmy *bod* a *rovina* a dříve definované pojmy *množina* a *vzdálenost bodů*)
4. ***Matematické věty*** – výroky (tvrzení), jejichž pravdivost se musí dokázat. Důkaz musí vycházet z axiomů nebo vět dokázaných dříve. Jakékoliv tvrzení se může do dané matematické teorie zařadit až tehdy, je-li dokázáno.

Typy matematických vět: 1) $\boxed{A}$ 2) $\boxed{A \Rightarrow B}$ 3) $\boxed{A \Leftrightarrow B}$

1) Důkaz věty (tvrzení) typu A:

- PŘÍMÝ … princip:

1) V – platí (axiom nebo předem dokázaná věta)

2) $\underbrace{V \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\text{řetězec platných implikací}}$

3) A_n => A (poslední tvrzení řetězce je dokazované tvrzení)

- SPOREM … princip:

1) Předpoklad, že A neplatí, tzn. platí A‘

2) $\underbrace{A' \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B}_{\text{řetězec platných implikací}}$, kde B je evidentní nepravda

3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení – tj. předpoklad o neplatnosti A.

2) Důkaz věty typu A => B:

- **PŘÍMÝ** … princip : 1) Nechť A platí

2) $\underbrace{A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\textit{řetězec platných implikací}}$

3) A_n =>B platí

- **NEPŘÍMÝ** … princip založen na ekvivalenci dané implikace A => B a její obměny B‘ => A‘. Obměněná implikace B‘ => A‘ se dokazuje přímo.

- **SPOREM** … princip:

1) Předpoklad, že A => B neplatí, tzn. platí (A => B)‘ = A $\wedge$ B‘

2) $\underbrace{(A \wedge B') \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_{n-1} \Rightarrow T_n}_{\textit{řetězec platných implikací}}$, kde T_n je evidentní nepravda

3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení – tj. předpoklad o neplatnosti A => B

3) Důkaz věty typu A $\Leftrightarrow$ B:

Využijeme skutečnosti, že ekvivalence logicky odpovídá oboustranné implikaci:

$$(A \Leftrightarrow B) = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)),$$

takže místo jedné ekvivalence dokážeme dvě implikace.

<u>**Matematická indukce:**</u> je důkazová metoda, kterou se dokazují výroky typu:

a) $\forall n \in N: \quad T_{(n)}$

b) $\forall n \in N, kde\ n > n_0: \quad T_{(n)}$.

Princip: Nechť $T_{(n)}$ je tvrzení o proměnné n, které chceme dokázat. $n, k \in N$

I. <u>První krok</u> $T_{(1)}$– dokážeme platnost tvrzení pro 1 (případně pro nejmenší přirozené číslo n_0, pro něž má T platit)

II. <u>Indukční krok:</u> dokážeme platnost implikace $T_{(k)} \Rightarrow T_{(k+1)}$, tedy dokážeme, že z platnosti dokazovaného tvrzení T pro nějaké $k \geq n_0$ automaticky plyne platnost tohoto tvrzení i pro bezprostředně následující přirozené číslo *k + 1*.