32.B Posloupnosti

Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel nebo její části.

Posloupnost - ***nekonečná*** - má definiční obor celou množinu ***N*** a zapisujeme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$

- ***konečná*** - má definiční obor {1, 2, 3, …, k} a zapisujeme ji $(a_n)_{n=1}^{k} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají ***členy posloupnosti***;
Funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in \boldsymbol{N}$ se nazývá ***n-tý člen posloupnosti*** a značí se a_n.

Způsoby zadání posloupnosti:

- ***výčtem prvků*** …. např. (2, 4, 6, 8, 10)
- ***vzorcem pro n-tý člen*** …. např. $a_n = 3n^2 - 5$, $\left(3n^2 - 5\right)_{n=1}^{\infty}$
- ***graficky*** … je zadán graf posloupnosti
- ***rekurentně*** – je zadán první člen posloupnosti (případně několik prvních členů) a dále je zadán předpis (tzv. rekurentní vzorec) pro výpočet následujícího členu pomocí členu předcházejícího, případně členů předcházejících.

Vlastnosti posloupnosti:

Monotónnost:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} > a_n$
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} < a_n$
- **konstantní** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} = a_n$
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} \geq a_n$

Omezenost:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

- **omezená zdola** $\Leftrightarrow \exists d \in R: (\forall n \in N: a_n \geq d)$
- **omezená shora** $\Leftrightarrow \exists h \in R: (\forall n \in N: a_n \leq h)$
- **omezená** právě tehdy, je-li omezená zdola i shora

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická** právě tehdy, když existuje reálné číslo $d \in \boldsymbol{R}$, (tzv. diference) tak, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $a_{n+1} = a_n + d$.

Pozn.: 1) Z rekurentního vzorce plyne, že rozdíl každých dvou po sobě následujících členů je konstantní a rovná se diferenci *d*.

2) Pro každou trojici a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ($n \geq 2$) po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti platí $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, tj. prostřední člen uvedené trojice je aritmetickým průměrem svých sousedních členů.

Pro každou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí $d \in \boldsymbol{R}$ platí:

1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ … vzorec pro výpočet libovolného členu aritmetické posloupnosti pomocí členu prvního
2) $a_r = a_s + (r-s)d$ … vzorec pro výpočet libovolného členu aritmetické posloupnosti pomocí libovolného jiného jejího členu
3) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ … vzorec pro výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická** právě tehdy, když existuje reálné číslo $q \in \boldsymbol{R}$, (tzv. kvocient) tak, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Pozn.: 1) Z rekurentního vzorce plyne, že podíl každých dvou po sobě následujících členů je konstantní a rovná se kvocientu q.
2) V geometrické posloupnosti jsou libovolné trojice po sobě jdoucích členů svázány s geometrickým průměrem.

Pro každou geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \in \boldsymbol{R}$ platí:

1) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$… vzorec pro výpočet libovolného členu geometrické posloupnosti pomocí členu prvního
2) $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$ … vzorec pro výpočet libovolného členu geometrické posloupnosti pomocí libovolného jiného členu
3) $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ … vzorec pro výpočet součtu prvních n členů geometrické posloupnosti, jejíž kvocient $q \neq 1$.

Pokud má geometrická posloupnost kvocient $q = 1$, pak je konstantní a součet jejích prvních n členů se určí jednoduše $s_n = n \cdot a_1$.

Užití geometrických posloupností:

- finanční matematika, např. úročení vkladů, splácení dluhů, …
- demografické údaje, např. vývoj počtu obyvatel v čase, …
- fyzikální úlohy, např. pohlcování elektromagnetického záření překážkami, …
- chemické úlohy, např. poločasy přeměny …

Př. 1 Nechť je N_0 počáteční vklad do banky (počáteční počet lidí v daném městě). Nechť je p počet procent ročního úroku (počet procent ročního přírůstku obyvatel). Kolik peněz bude v bance po n letech (Kolik obyvatel bude ve městě po n letech)?

Řeš.: počáteční stav …. N_0

stav po 1 roce ….. $N_1 = N_0 + \frac{p}{100} N_0 = N_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

stav po 2 letech … $N_2 = N_1 + \frac{p}{100} N_1 = N_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = N_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ ……

stav po n letech … $N_n = N_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Pozn.: Je-li úrok zdaněn x procenty, je třeba výpočet upravit:

počáteční stav …. N_0

stav po 1 roce ….. $N_1 = N_0 + \frac{p}{100}N_0 - \frac{x}{100}.\frac{p}{100}.N_0 = N_0\left(1+\frac{p}{100}-\frac{xp}{10000}\right)$ …

stav po n letech … $N_n = N_0\left(1+\frac{p}{100}-\frac{xp}{10000}\right)^n$

Př. 2 Nechť skleněná deska pohltí p % světla. Kolik desek je třeba na sebe naskládat, aby pohltily 80 % světla?

Řeš.: intenzita světla …..I_0

přes jednu desku projde … $I_1 = I_0 - \frac{p}{100}I_0 = I_0\left(1-\frac{p}{100}\right)$

přes dvě desky projde … $I_2 = I_1 - \frac{p}{100}I_1 = I_1\left(1-\frac{p}{100}\right) = I_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$ …

přes n desek projde … $I_n = I_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$

Má-li být pohlceno 80 % světla, musí být intenzita I_n nejvýš 20 % I_0.

Tedy $I_n \le 0{,}2 \,.\, I_0$

$$I_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \le 0{,}2.I_0$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \le 0{,}2$$

$$n.\log\left(1-\frac{p}{100}\right) \le \log 0{,}2$$

$$n \ge \frac{\log 0{,}2}{\log\left(1-\frac{p}{100}\right)}$$