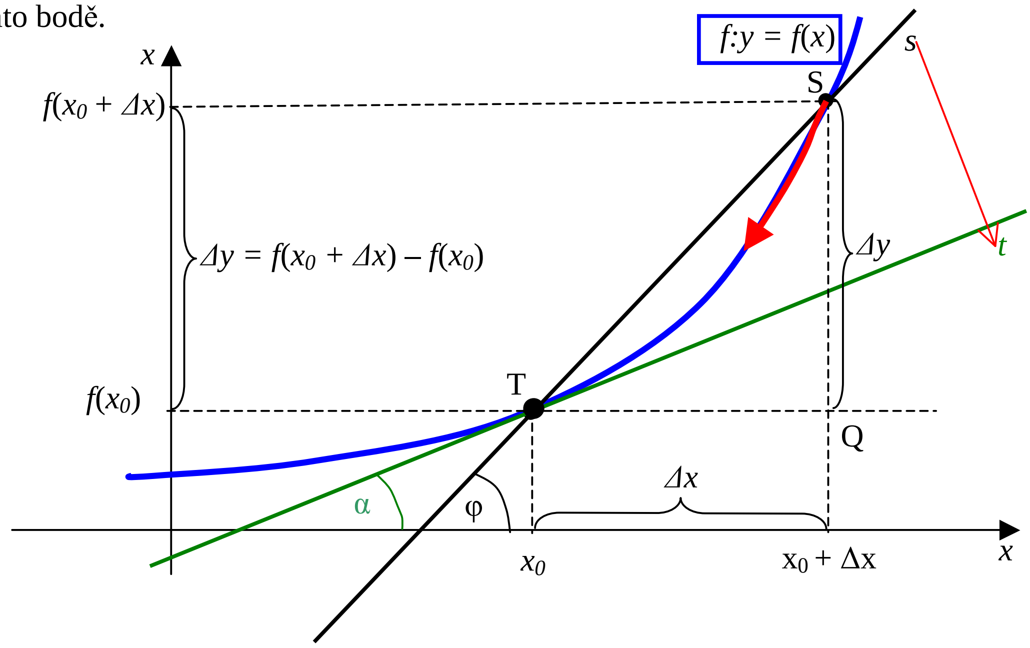
35.B Derivace funkce a její užití

Derivace funkce představuje jeden ze základních pojmů diferenciálního počtu. Byl vytvořen ve druhé polovině 17. století při řešení konkrétních fyzikálních a geometrických problémů.

Geometrický význam derivace funkce v daném bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě.



Obrázek lze využít k vysvětlení způsobu určení směrnice tečny grafu funkce *f* (tedy způsobu určení derivace funkce *f*).

Na obrázku:

- část grafu funkce $\boxed{f: y = f(x)}$
- sečna $s = \leftrightarrow TS$ se směrovým úhlem φ
- tečna *t* se směrovým úhlem α vedená ke grafu funkce *f* bodem *T*.

Je zřejmé, že směrnici k_s sečny *s* určíme z pravoúhlého trojúhelníku STQ takto:

$$k_s = tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ze sečny se stane tečna v okamžiku, kdy bod *S* přejde po části grafu funkce *f* do bodu *T*. Pohyb bodu *S* do *T* a přechod sečny do tečny jsou na obrázku naznačeny červenými šipkami.
Přitom se zároveň zmenšují rozměry ΔSTQ (např. $\Delta x \to 0$).

Směrnice tečny: $$k_t = \lim_{S \to T} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Směrnicová rovnice tečny *t* je pak $t: y = k_t x + q$

Derivace funkce *f* v bodě x_0 je tedy $\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$ *(čteme: limita podílu přírůstku funkční hodnoty a přírůstku argumentu za předpokladu, že se přírůstek argumentu blíží k nule).*

Derivace funkce v intervalu: Má-li funkce *f: y = f(x)* v každém bodě *x* jisté množiny *M* derivaci *f '(x)*, pak funkci *f ': y = f '(x)* nazýváme derivací funkce *f* na množině *M*.

Derivace některých elementárních funkcí:

funkce	její derivace v bodě x	x z intervalu
$y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}$	$y = n.x^{n-1}$	$(-\infty;\infty)$
$y = x^k, \quad k \in \mathbf{Z}$	$y = k.x^{k-1}$	$(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
$y = x^r, \quad r \in \mathbf{R}$	$y = r.x^{r-1}$	$(0;\infty)$
$y = c$	$y = 0$	$(-\infty;\infty)$
$y = \sin x$	$y = \cos x$	$(-\infty;\infty)$
$y = \cos x$	$y = -\sin x$	$(-\infty;\infty)$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbf{Z}$
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(k\pi;(k+1)\pi)\ ,\ k\in\mathbf{Z}$
$y = e^x$	$y = e^x$	$(-\infty;\infty)$
$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y = a^x.\ln a$	$(-\infty;\infty)$
$y = \ln x$	$y=\frac{1}{x}$	$(0;\infty)$
$y = \log_a x\ ,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y=\frac{1}{x.\ln a}$	$(0;\infty)$

Základní pravidla pro derivování:

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ … derivace součtu (rozdílu) se rovná součtu (rozdílu) derivací

2. $(cf)'(x) = c.\,f'(x)$ …… konstanta se „vynáší“ před znak derivace

3. $(fg)'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$ ….. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ ….. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

5. derivace složené funkce: $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,.\,g'(x)$

Souvislost derivace funkce a některých základních vlastností funkce:

(stále je třeba si uvědomovat, že derivace funkce je vlastně směrnice tečny grafu funkce!!!)

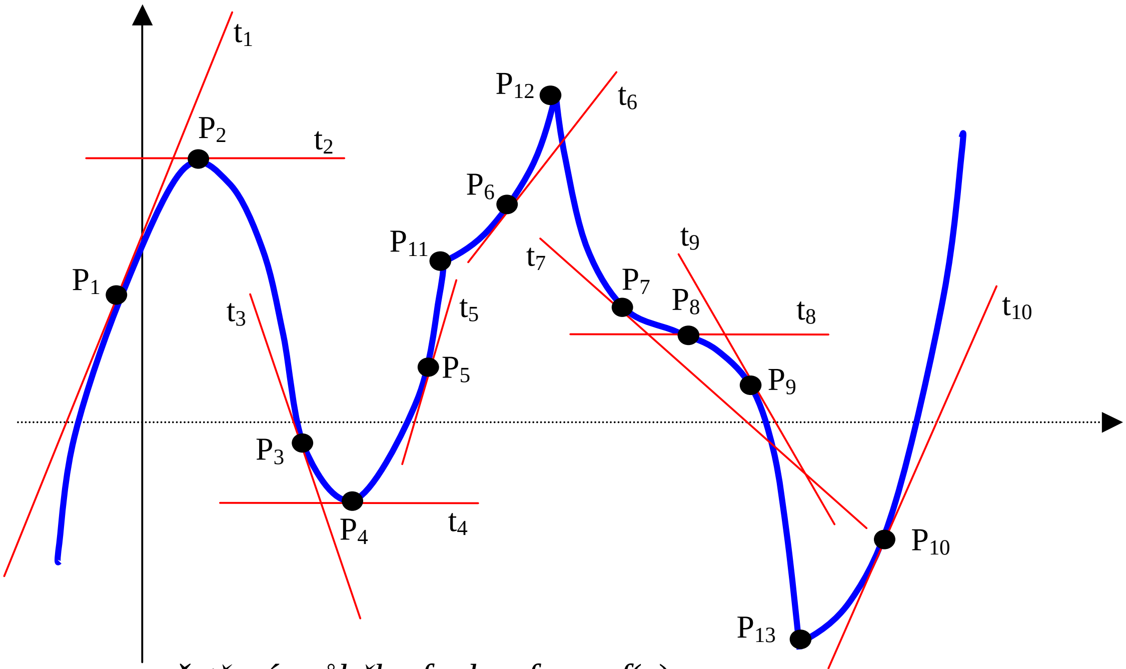
- ***Spojitost*** funkce: Má-li funkce f v bodě a derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě a spojitá a nemusí tam mít derivaci. (viz např. P_{11}, P_{12}, P_{13})

- ***Monotónnost*** funkce: Má-li funkce f v bodě a kladnou (zápornou) první derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí (klesající). (viz např. P_1, P_5, P_6, P_{10}, (P_3, P_7, P_9)). Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě a rostoucí (klesající) a derivace v bodě a se může rovnat nule (viz. např. P_8) nebo dokonce vůbec nemusí existovat. (viz např., P_{11}, P_{12}, P_{13})

- ***Extrémy*** funkce: Funkce f může (ale nemusí!!) mít v bodě a lokální extrém pouze tehdy, když $f'(a) = 0$ (pak a je stacionární bod) (viz např. P_2, P_4) nebo když derivace v bodě a neexistuje (viz např. P_{12}, P_{13}). Uvedené podmínky pro existenci extrému v bodě a jsou nutné, nikoliv však postačující. Tozn., že podmínka může být splněna a funkce v bodě a přesto extrém nemá (viz např. P_8, P_{11}).

- ***Konvexnost a konkávnost*** funkce: Má-li funkce f v bodě a druhou derivaci $f''(a) > 0$, pak je funkce v bodě a konvexní (dutá). Je-li $f''(a) < 0$, pak je funkce v bodě a

konkávní (vypuklá). Body, ve kterých $f''(a) = 0$ a ve kterých se zároveň mění konvexní charakter funkce na konkávní či naopak, jsou inflexní body.



Osnova pro vyšetření průběhu funkce f: y = f(x):

1. **1.** D(f), sudost, lichost, periodičnost, průsečíky s osami, intervaly kladných a záporných funkčních hodnot
2. **2.** Chování funkce f v nevlastních bodech (určení $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$),

   určení asymptot (pokud existují)

   - bez směrnice … … asymptota a_b bez směrnice může existovat pouze v bodě nespojitosti b, a to tehdy, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v b je nevlastní. Pak a_b: $x = b$.
   - se směrnicí ……. a_s: $y = k.x + q$, kde $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$
3. **3.** Určení intervalů monotónnosti a extrémů funkce
4. **4.** Určení intervalů konvexnosti a konkávnosti a inflexních bodů funkce
5. **5.** Graf funkce

Derivace funkce zadané implicitně:

Funkce může být zadaná - explicitně (přímo, tedy rovnicí f: $y = f(x)$)

- implicitně (nepřímo, zastřeně, zprostředkovaně) – např. pomocí analytického vyjádření křivky $F(x, y) = 0$, která sama nemusí být grafem funkce, ale může představovat sjednocení grafů několika funkcí f_i (viz např. kuželosečky).

Derivování implicitní funkce:

x … známým způsobem

y … jako složenou funkci závisící na x

(např.: $(y^3 + x^2 + 7)' = 3y^2 . y' + 2x$)

Fyzikální význam derivace:

Jednou z nejdůležitějších oblastí použití derivace ve fyzice je derivace podle časové proměnné vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase.

Např. rychlost je derivace dráhy podle času

zrychlení je derivace rychlosti podle času