37.B Stereometrie

Stereometrie se zabývá vlastnostmi prostorových útvarů.
Základními útvary jsou ***body***, ***přímky*** a ***roviny***. Přitom body jsou prvky prostoru, zatímco přímky a roviny (příp. jejich části) jsou podmnožiny prostoru.

Polohové vlastnosti přímek a rovin

Dvě přímky v prostoru

přímky *p*, *q*

- leží v jedné rovině
  - mají společný právě jeden bod
    p, *q* jsou různoběžky
  - nemají žádný společný bod, pak
    p, *q* jsou různé rovnoběžky,
    nebo mají nekonečně mnoho společných bodů, pak *p*, *q* splývají
- neleží v jedné rovině
  (nemají žádný společný bod)
  p, *q* jsou mimoběžky

Přímka a rovina

přímka p, rovina ρ

- mají společný právě jeden bod
  p je různoběžná s ρ
- nemají žádný společný bod, pak je
  p rovnoběžná s ρ a neleží v ní
  nebo mají nekonečně mnoho společných bodů, pak *p* leží v ρ

Dvě roviny

roviny ρ, σ

- průnikem je přímka
  ρ, σ jsou různoběžné
- průnik je prázdný, pak ρ, σ jsou různé rovnoběžné roviny
  nebo mají nekonečně mnoho společných bodů neležících jen na přímce, pak ρ = σ

Některé věty:

a) Dvěma různými body A, B je určena jediná přímka.
b) Leží-li dva různé body v rovině ρ, pak přímka p jimi určená leží také v rovině ρ .
c) Mají-li dvě různé roviny ρ a σ společný bod A, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází. Mimo tuto přímku nemají společné již žádné body.
d) Rovina je jednoznačně určena:
    1) Přímkou a bodem, který na ní neleží.
    2) Dvěma různými rovnoběžnými přímkami.
    3) Dvěma různoběžnými přímkami.
    4) Třemi různými body, které neleží v téže přímce.

Značení: Přímka ↔AB určena dvěma body A, B.
Rovina ↔ABC určena třemi různými body A, B, C.
Rovina ↔Ap určena bodem A a přímkou p, $A \notin p$.
Rovina ↔pq určena dvěma přímkami p, q, $p \neq q$.

Rovnoběžnost přímek a rovin

1) Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.
2) Rovnoběžnost přímek je tranzitivní: $p||q \wedge q||r \Rightarrow p||r$

Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:

3) Přímka *p* je rovnoběžná s rovinou ρ, obsahuje-li rovina ρ aspoň jednu přímku *p´*, která je s přímkou *p* rovnoběžná.
4) Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin

5) Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich např. ρ obsahuje dvě různoběžné přímky *p*, *q*, které jsou rovnoběžné s rovinou σ.
6) Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.
7) Rovnoběžnost rovin je tranzitivní: $\rho||\sigma \wedge \sigma||\tau \Rightarrow \rho||\tau$
8) Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina v rovnoběžných přímkách.

Metrické vlastnosti přímek a rovin

Odchylky přímek a rovin

1) Odchylka dvou různoběžných přímek - je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají.
2) Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0° (0 rad).
3) Odchylka dvou mimoběžných přímek - je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami. Odchylka dvou mimoběžných přímek nezávisí na volbě bodu, kterým vedeme rovnoběžky s danými přímkami.
4) Je-li přímka *p* kolmá k rovině ρ, je jejich odchylka rovna 90°.
5) Pokud přímka *p* není kolmá k rovině ρ, pak se jejich odchylka rovná odchylce této přímky *p* od jejího pravoúhlého průmětu *p*‘ do roviny ρ.
6) Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou kolmou na obě roviny. Pozn.: Odchylka dvou rovin je odchylka jejich normál (normála roviny je každá přímka kolmá k rovině)

Kolmost přímek a rovin

1) Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90°.
2) Dvě úsečky jsou kolmé právě když leží na kolmých přímkách. (Ve stereometrii mohou být kolmými i mimoběžné přímky.)
3) Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny.

Kritérium kolmosti přímky a roviny:

4) Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.
5) Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.
6) Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou rovinu.

Kritérium kolmosti dvou rovin:

7) Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Vzdálenosti bodů, přímek a rovin

1) Vzdálenost bodů A, B je délka úsečky AB značíme ji $|AB|$.
2) Vzdálenost bodu A od přímky *p* je délka úsečky AP, kde P je pata kolmice *k* vedené v rovině ↔A*p* bodem A k přímce *p*. Značíme ji $|Ap|$.
3) Vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A´ do roviny ρ. Značíme ji $|A\rho|$.
4) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek *p*, *q* je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. Značíme ji $|pq|$.
5) Vzdálenost dvou mimoběžných přímek *p*, *q* je délka osy mimoběžek.
   Pozn.: Osa mimoběžek *p*, *q* je nejkratší ze všech příček mimoběžek (úseček XY, kde $X \in p,\ Y \in q$), která je zároveň kolmá k oběma mimoběžkám.
6) Vzdálenost přímky *p* od roviny ρ s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky *p* od této roviny ρ. Značíme ji $|p\rho|$.
7) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ, σ je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny. Značíme ji $|\rho\sigma|$.

Volné rovnoběžné promítání:

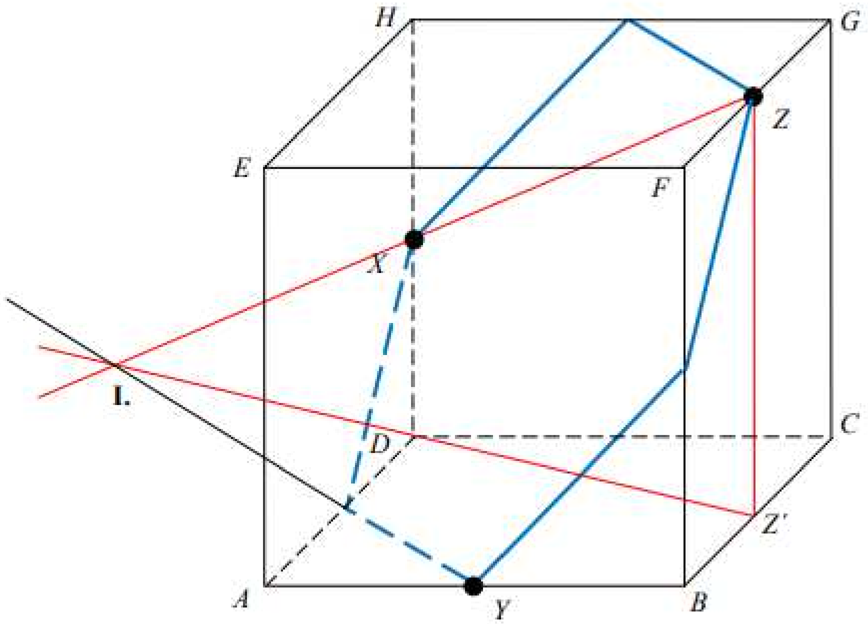
- slouží ke grafickému znázorňování prostorových útvarů do roviny.

- Rovina, do níž těleso promítáme, se nazývá *průmětna*.
- Každá rovina, která je s průmětnou rovnoběžná, se nazývá *průčelná rovina*.
- Průmětem (obrazem) bodu je bod, přímky bod nebo přímka, úsečky bod nebo úsečka.
- Obrazem dvou rovnoběžných přímek jsou dvě rovnoběžné přímky, dva body nebo jedna přímka (zachovává se rovnoběžnost).
- Útvary, které leží v průčelné rovině, se zobrazují ve skutečné velikosti.
- Úsečky, které jsou kolmé k průčelné rovině, se zkracují na polovinu a nanášejí se pod úhlem 45°.
- Při zobrazení úseček na rovnoběžných přímkách se zachovává poměr jejich délek.

Řez tělesa rovinou

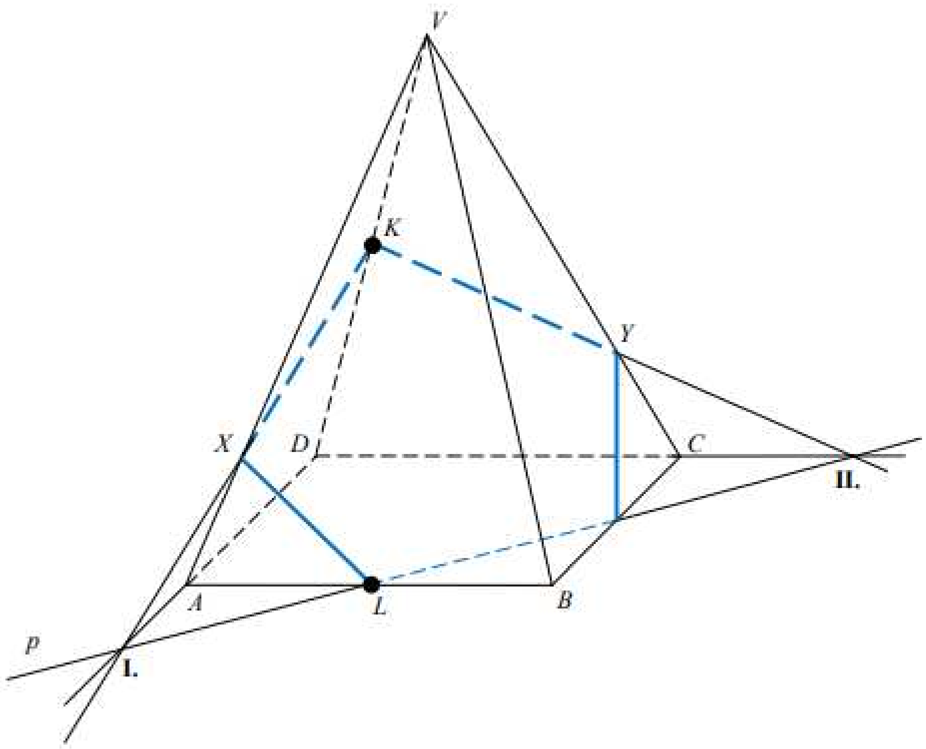
Př. 1: Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou ↔XYZ, kde body X, Y, Z jsou středy hran DH, AB, FG.

Řeš.:



Př. 2: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou, která je určena přímkou p, která je rovnoběžná s přímkou AC a prochází bodem L, kde L je středem hrany AB. Dále bodem K, který je středem hrany DV.

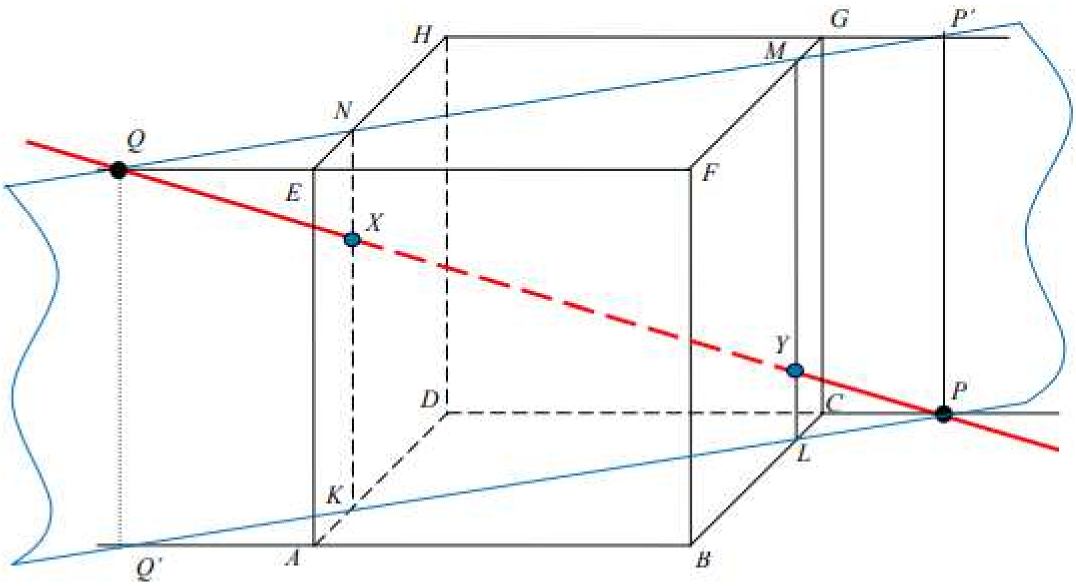
Řeš.:



Průsečíky přímky s tělesem

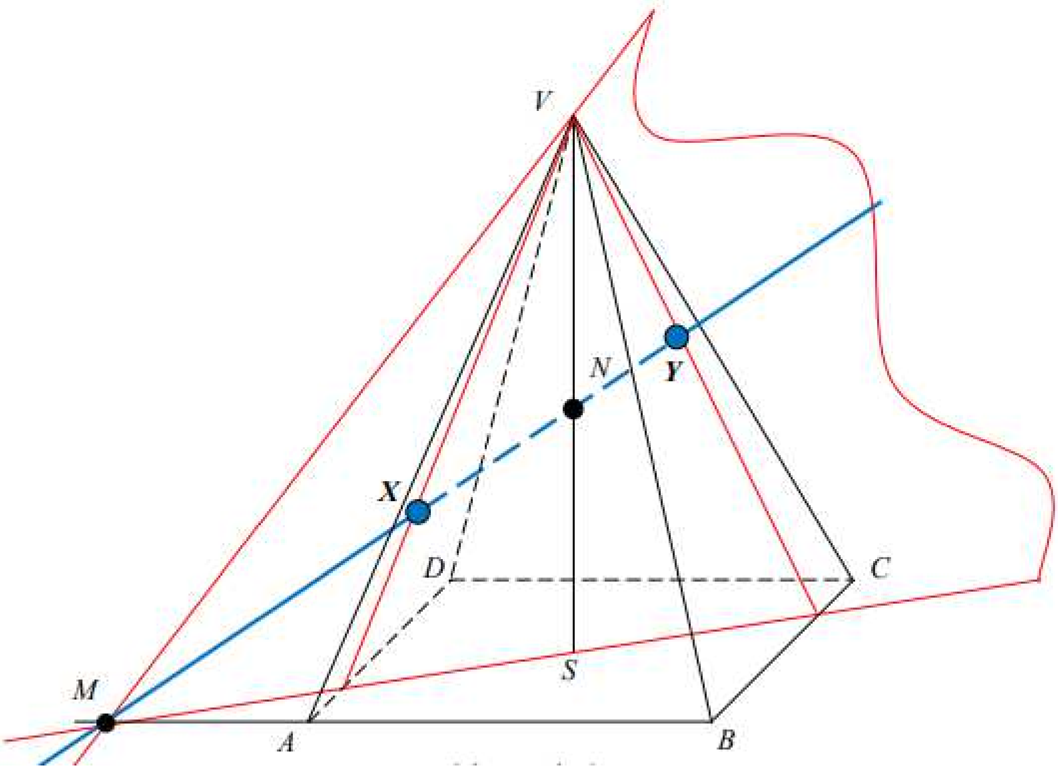
Př. 3: Je dána krychle *ABCDEFGH* a přímka $p = \leftrightarrow PQ$. Bod *P* je bodem polopřímky *DC*, $|DP| = \frac{4}{3}|CD|$, bod *Q* je bodem polopřímky *EF*, $|FQ| = \frac{3}{2}|EF|$ .Sestrojte průsečíky přímky *p* s povrchem krychle.

Řeš.:



Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Bod S je středem podstavy. Bod M je bodem polopřímky BA, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod N je středem úsečky SV. Sestrojte průnik přímky MN s jehlanem.

Řeš.

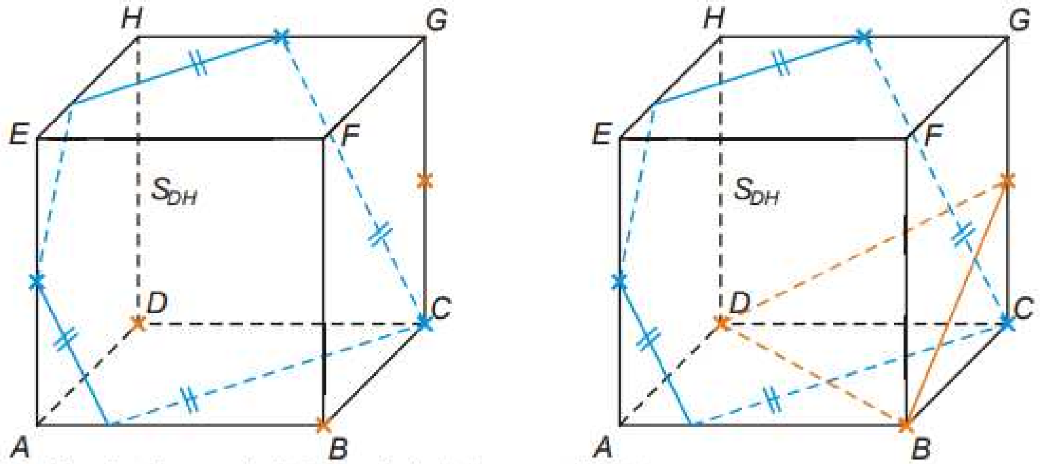


Průsečnice dvou rovin

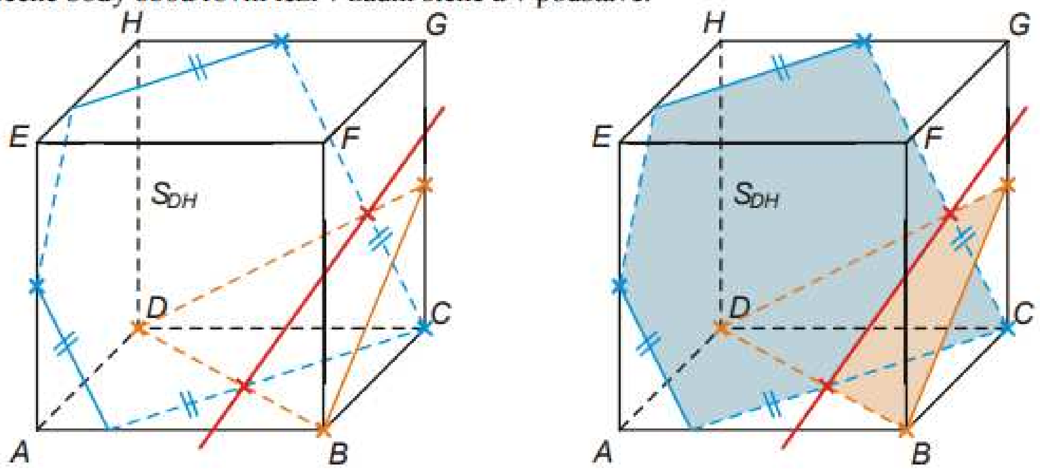
Postup při hledání průsečnice dvou rovin:

- Sestrojíme řezy tělesa pro obě roviny.
- Hledáme společné body hranic obou řezů v jednotlivých stěnách (typicky bychom měli nalézt dva).
- Spojnice nalezených bodů je hledaná průsečnice..

Př. 5.: Je dána krychle ABCDEFGH. Sestroj průsečnici rovin $CS_{AE}S_{GH}$ a BDS_{CG}.
Řeš.:

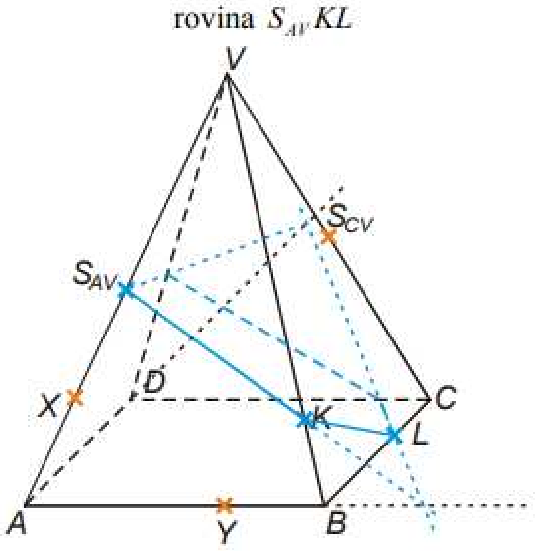


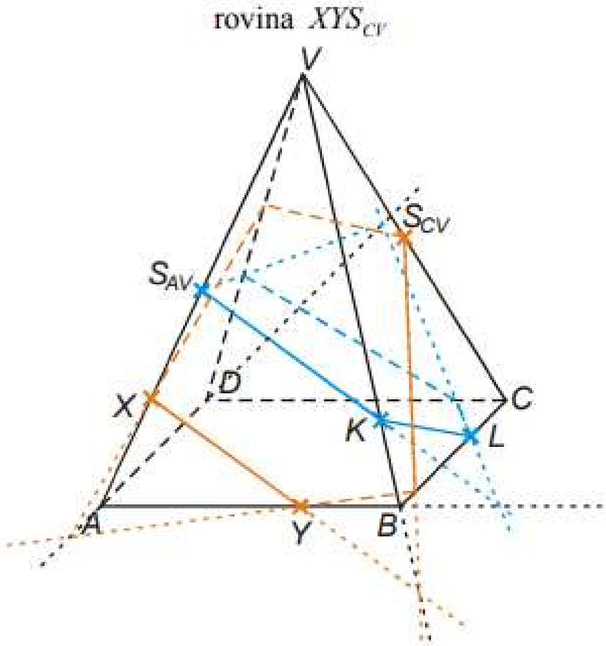
Společné body obou rovin leží v zadní stěně a v podstavě.



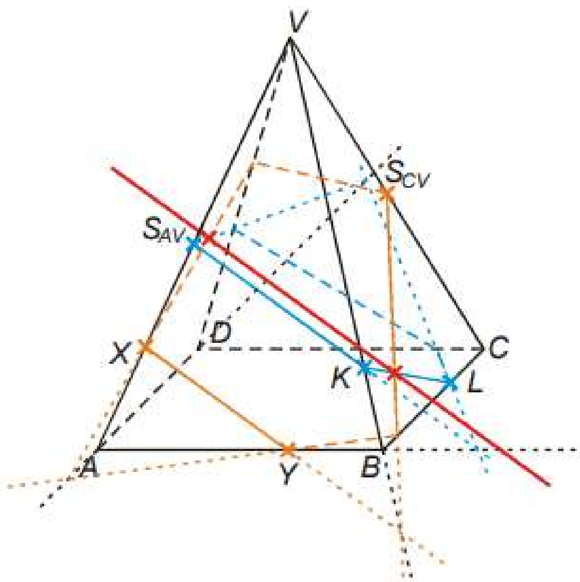
Př. 6.: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Sestroj průsečnici roviny $S_{AV}KL$ ($K \in BV$, $|VK| = 4.|KB|$ a $L \in BC$, $|BL| = 2.|LC|$) s rovinou XYS_{CV} ($X \in AV$, $|XV| = 3.|XA|$ a $Y \in AB$, $|AY| = 2.|YB|$).

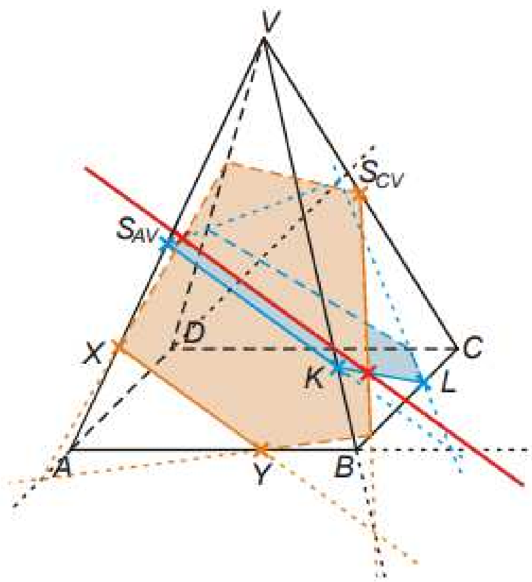
Řeš.:





Společné body obou rovin leží v levé a pravé stěně.





Průsečík přímky s rovinou

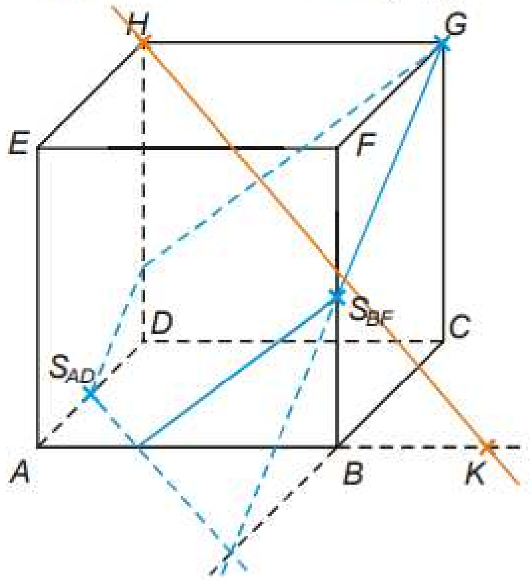
Postup při hledání průsečíku přímky s rovinou:

- Sestrojíme řez tělesa rovinou.
- Sestrojíme řez tělesa další libovolnou (ale vhodně zvolenou) rovinou, která obsahuje přímku.
- Sestrojíme průsečnici obou rovin.
- Průsečík průsečnice a přímky je hledaným bodem.

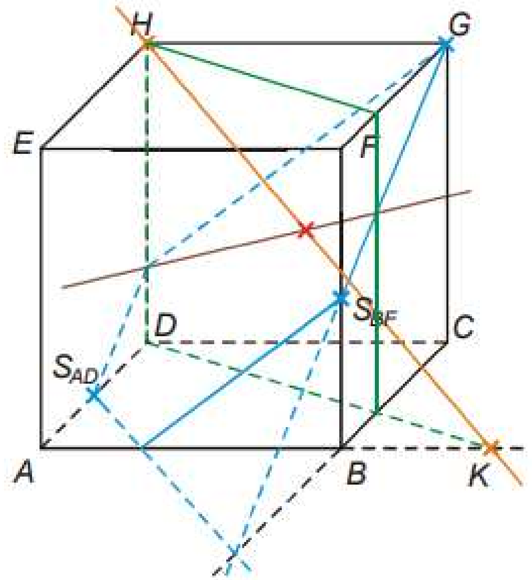
Př. 7.: Je dána krychle ABCDEFGH. Najdi průsečík přímky KH s rovinou $GS_{BF}S_{AD}$. Bod K leží na polopřímce AB a platí $|AK| = 1{,}5|AB|$.

Řeš.:

přímka KH a rovina $GS_{BF}S_{AD}$

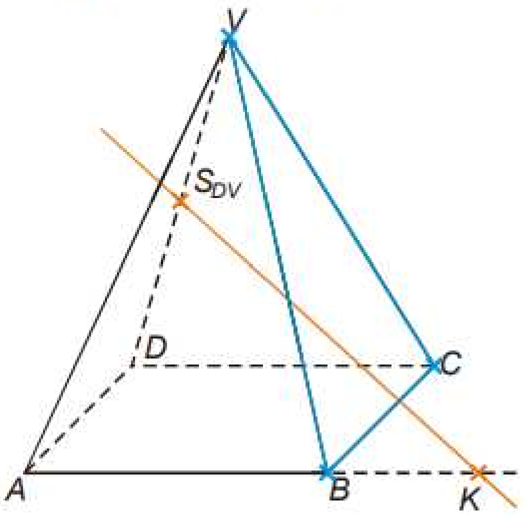


průsečnice pomocné roviny KDH a roviny $GS_{BF}S_{AD} \Rightarrow$ průsečík přímky KH s rovinou $GS_{BF}S_{AD}$



Př.: 8 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Sestroj průsečík přímky KS_{DV} (kde $K \in AB$, $|AK| = 1{,}5|AB|$) s rovinou BCV.

přímka KS_{DV} a rovina BCV



průsečnice pomocné roviny $KS_{DV}V$ a roviny $BCV \Rightarrow$ průsečík přímky KS_{DV} s rovinou BCV