41B. Metrické vlastnosti přímek a rovin

1) Odchylky:

a) **dvou přímek *p, q***: $\omega_{(p,q)} = \alpha \;\ldots\ldots\; \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\boxed{\cos\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}},$$

kde φ je odchylka obou směrových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ přímek *p, q*… $\varphi \in \langle 0; \pi \rangle$

b) **dvou rovin *ρ, σ***: $\omega_{(\rho,\sigma)} = \alpha \;\ldots\ldots\; \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\boxed{\cos\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{n}_\rho.\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho|.|\vec{n}_\sigma|}},$$

kde φ je odchylka normálových vektorů rovin *ρ, σ* … $\varphi \in \langle 0; \pi \rangle$

c) **přímky *p* od roviny *ρ***: $\omega_{(p,\rho)} = \alpha \;\ldots\ldots\; \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\boxed{\sin\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}_\rho|}{|\vec{u}|.|\vec{n}_\rho|}},$$

kde φ je odchylka směrového vektoru $\vec{u}$ přímky *p* a normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny *ρ* … $\varphi \in \langle 0; \pi \rangle$

2)Vzdálenosti:

a) **bodu *M* od přímky *p* v rovině**: *M* $[x_M; y_M]$,
p: $ax + by + c = 0$

$$\boxed{v(M;p) = |M,p| = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

b) **bodu *M* od roviny *ρ* v prostoru**: *M* $[x_M; y_M; z_M]$,
ρ : $ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{v(M;\rho) = |M,\rho| = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

c) **dvou rovnoběžných přímek *p, q* v rovině**: *p*: $ax + by + c_1 = 0$
q: $ax + by + c_2 = 0$

$$\boxed{v(p;q) = |p,q| = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Pozn.: Výpočet vzdálenosti rovnoběžných přímek v rovině lze provést i tak, že zvolíme libovolný bod přímky *p* a vypočítáme jeho vzdálenost od přímky *q* pomocí vzorce uvedeného v případě a).

d) **dvou rovnoběžných rovin *ρ, σ***: *ρ* : $ax + by + cz + d_1 = 0$,
σ: $ax + by + cz + d_2 = 0$

$$\boxed{v(\rho;\sigma) = |\rho,\sigma| = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Pozn.: Pro výpočet vzdálenosti rovnoběžných rovin lze zvolit libovolný bod z roviny *ρ* a vypočítat pomocí předchozího vzorce vzdálenost tohoto bodu od roviny *σ*. To bude zároveň hledaná vzdálenost *ρ, σ*.

e) **bodu *M* od přímky *p* v prostoru**: výpočet je třeba provést pomocí prostředků analytické geometrie (vzorec pro tento případ neexistuje).

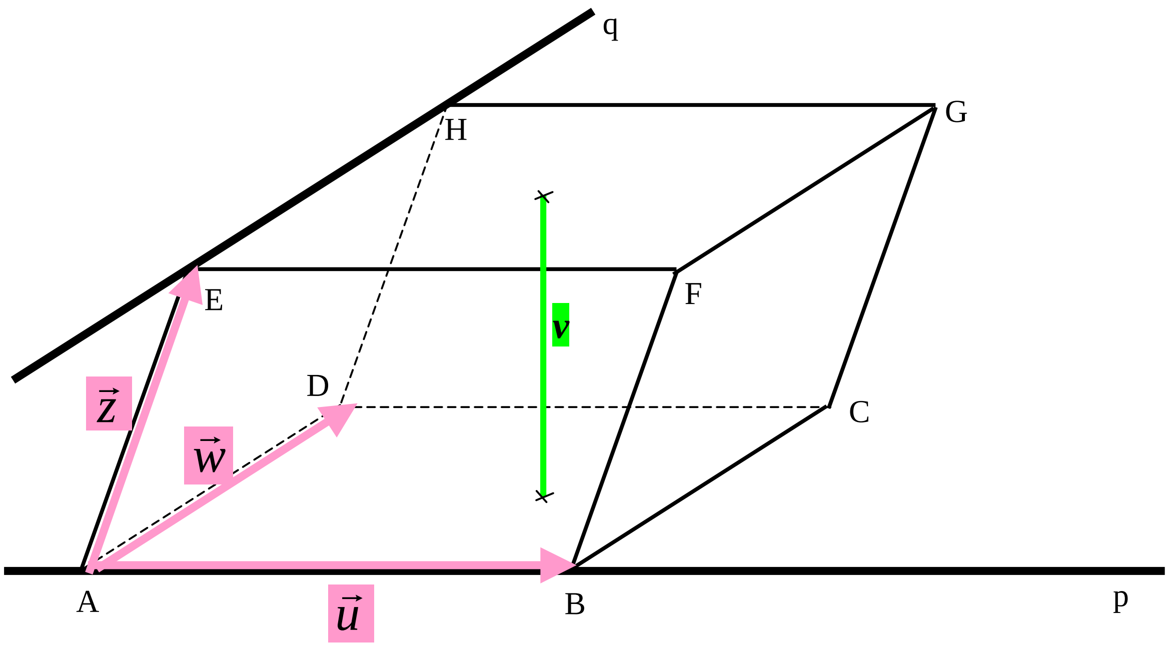
Jedna z řady možností: 1) Najdeme rovnici roviny ρ vedené bodem M kolmo k přímce p.
2) Vypočítáme průsečík M' přímky p a roviny ρ.
3) $v(M;p) = |M, p| = |M, M'|$

f) **přímky *p* od roviny *ρ* v případě, že $p \parallel \rho$** představuje vzdálenost libovolného bodu přímky p od roviny ρ (viz případ b)).

g) **dvou rovnoběžných přímek *p, q* v prostoru** představuje vzdálenost libovolného bodu přímky p od přímky q (neexistuje vzorec – řešíme způsobem e)!!!)

h) **dvou mimoběžných přímek *p, q*** představuje délku ***v*** *= v(p, q)* tzv. osy mimoběžek. Osa mimoběžek je nejkratší ze všech jejich příček (tj. úseček AB, kde A je libovolný bod přímky p, B je libovolný bod přímky q). Osa mimoběžek je ta z příček, která je k oběma mimoběžkám kolmá.

Jedna z možností, jak vypočítat vzdálenost ***v*** dvou mimoběžných přímek ***p***, ***q***, využívá skutečnosti, že objem rovnoběžnostěnu, jehož dvě hrany vložíme do uvedených mimoběžek, lze vypočítat dvěma způsoby:



$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCDEFGH} = |(\vec{u} \times \vec{w}) . \vec{z}| \\[2em] V_{ABCDEFGH} = |\vec{u} \times \vec{w}| . v \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{|(\vec{u} \times \vec{w}) . \vec{z}|}{|\vec{u} \times \vec{w}|}} \quad ,$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p,
$\vec{w}$ je směrový vektor přímky q,
$\vec{z}$ je vektor vložený do libovolné příčky mimoběžek p, q