[2.4.B4]. Rozhodněte, zda $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. $\cdot$ značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T=\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$ b) $T=\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in \mathbf{Z}\}$

c) $T=\left\{\frac{a}{2^k}\mid a\in \mathbf{Z}\ ,\ k\geq 0 \text{ celé}\right\}$ d) $T=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\mid a,b,c\in \mathbf{Q}\}$

e) $T=\{a+b\sqrt[3]{4}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$ f) $T=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$

g) $T=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in \mathbf{Q}\}$

h) $T=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in \mathbf{Q}\}$.

[2.4.B5]. Rozhodněte, zda $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. $\cdot$ značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T=\{a+bi\mid a,b\in \mathbf{Z}\}$ b) $T=\{a+bi\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$

c) $T=\{a+bi\mid a\in \mathbf{R},b\in \mathbf{Q}\}$ d) $T=\{b\cdot i\mid b\in \mathbf{Q}\}$

e) $T=\{z\in \mathbf{K}\mid\ |z|=1\}$ f) $T=\{a+b\sqrt{5}i\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$.

[2.4.B6]. Nechť $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso; nechť $z\in \mathbf{K}$ je libovolné pevné komplexní číslo. Symbolem $T(z)$ označme množinu

$$\left\{\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}\mid \forall m,n\in \mathbf{N}; a_i,b_j\in T\wedge b_0+\cdots+b_nz^n\neq 0\right\}$$

Dokažte, že pak :

a) $(T(z),+,\cdot)$ je číselné těleso b) $T\subseteq T(z)\ \wedge\ z\in T(z)$

c) $(T(z),+,\cdot)$ je nejmenším číselným tělesem obsahujícím množinu T a dané číslo z (tzn. je-li $(S,+,\cdot)$ nějaké číselné těleso s vlastnostmi: $T\subseteq S\ \wedge\ z\in S$, pak je $T(z)\subseteq S$).

[2.4.B7]. Při použití označení z předchozího cvičení dokažte, že:

a) $\mathbf{R}(\sqrt{3})=\mathbf{R}$ b) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$

c) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{4})$ d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\mathbf{Q}(\frac{1+\sqrt{2}}{3})=\mathbf{Q}(\frac{3}{\sqrt{2}})$

e) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in \mathbf{Q}\}$

f) $\mathbf{Q}(i\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{5}i\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$.

KAPITOLA 3:

VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: VEKTOROVÝ PROSTOR NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM

[3.1.A1]. U.p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje konečně mnoho vektorů.

[3.1.A2]. U.p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje právě 8 vektorů.

[3.1.A3]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(\sqrt{2})^2$.

[3.1.A4]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(\,i\,)^3$.

[3.1.A5]. Popište vektorový prostor $\mathbf{R}_4[x]$.

[3.1.A6]. Popište vektorový prostor $\mathbf{K}^5$.

[3.1.A7]. Nechť $(T,+,\cdot)$ je libovolné číselné těleso. Popište, jak lze T chápat jako vektorový prostor nad T.

[3.1.A8]. U.p. vektorového prostoru V nad T a dvou různých vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ takových, že $3\cdot\mathbf{u}=3\cdot\mathbf{v}$.

[3.1.A9]. U.p. dostatečné, ale nikoliv nutné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nulový vektor.

[3.1.A10]. U.p. nutné a dostatečné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nenulový vektor.

♣ ♣ ♣

[3.1.B1]. Je dáno číselné těleso T a množina čísel V. Sčítání vektorů definujeme jako obyčejné sčítání čísel a násobení čísla s vektorem definujeme jako obyčejné násobení čísel.
Rozhodněte, zda V je pak vektorový prostor nad T, je-li:

a) $T=\mathbf{K}$; $V=\mathbf{K}$ b) $T=\mathbf{R}$; $V=\mathbf{K}$

c) $T=\mathbf{R}$; $V=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$

d) $T=\mathbf{Q}$; $V=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in \mathbf{Q}\}$.

[3.1.B2]. Uvažme množinu $\mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ (t.zn. množinu všech zobrazení $\langle 0,1\rangle \to \mathbf{R}$). Pro $f,g \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme $f+g \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$, resp. $r\cdot f \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ ,\ \text{resp. } (r\cdot f)(x) = r\cdot(f(x))\ ,\ \text{pro } \forall x \in \langle 0,1\rangle.$$

Dokažte, že pak $\mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B3]. Uvažme množinu $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (tj. množinu všech zobrazení $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$). Pro $f,g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ a pro $r\in\mathbf{R}$ definujeme $f+g\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, resp. $r\cdot f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ ,\ \text{resp. } (r\cdot f)(x) = r\cdot(f(x))\ ,\ \text{pro } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dokažte, že pak $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B4]. Nechť $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ značí množinu všech spojitých reálných funkcí (tj. spojitých zobrazení $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$). Pro $f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ a pro $r\in\mathbf{R}$ definujeme $f+g$, resp. $r\cdot f$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ ,\ \text{resp. } (r\cdot f)(x) = r\cdot(f(x))\ ,\ \text{pro } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Potom:
a) zdůvodněte, že $f+g\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $r\cdot f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$
b) dokažte, že $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B5]. Nechť $\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ značí množinu všech reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$ a majících na tomto intervalu spojité derivace až do řádu n včetně (kde n je pevné přirozené číslo). Pro $f,g\in\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ a pro $r\in\mathbf{R}$ definujeme $f+g$, resp. $r\cdot f$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ ,\ \text{resp. } (r\cdot f)(x) = r\cdot(f(x))\ ,\ \text{pro } \forall x \in \langle 0,1\rangle.$$

Potom:
a) zdůvodněte, že $f+g\in\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$, $r\cdot f\in\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$
b) dokažte, že $\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B6]. Uvažme množinu T^A (tj. množinu všech zobrazení $A\to T$), kde A je libovolná neprázdná množina a T je libovolné číselné těleso. Pro $f,g\in T^A$ a pro $t\in T$ definujeme $f+g\in T^A$, resp. $t\cdot f\in T^A$ takto:

$$(f+g)(a) = f(a)+g(a)\ ,\ \text{resp. } (r\cdot f)(a) = r\cdot(f(a))\ ,\ \text{pro } \forall a \in A.$$

Dokažte, že pak T^A je vektorový prostor nad T.

[3.1.B7]. Nechť $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ značí množinu všech posloupností reálných čísel. Pro $(x_1,x_2,\ldots)$, $(y_1,y_2,\ldots)\in\mathcal{P}(\mathbf{R})$ a pro $r\in\mathbf{R}$ definujeme:

$$(x_1,x_2,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots) = (x_1+y_1\ ,\ x_2+y_2\ ,\ldots)$$
$$r\cdot(x_1,x_2,\ldots) = (r\cdot x_1\ ,\ r\cdot x_2\ ,\ \ldots).$$

Dokažte, že pak $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B8]. Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory nad číselným tělesem T. Pro libovolné $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\in V_1\times V_2$ a $t\in T$ definujeme:

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)+(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1\ ,\ \mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2)\ ,\ \text{resp. } t\cdot(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = (t\cdot\mathbf{u}_1\ ,\ t\cdot\mathbf{u}_2).$$

Dokažte, že pak $V_1\times V_2$ je vektorový prostor nad T.

[3.1.B9]. Je dáno číselné těleso T a množina V s operací $\oplus$. Dále je dán součin $\circ$ čísla z T s prvkem z V.
Rozhodněte, zda V je vektorový prostor nad tělesem T, jestliže:

a) $T=\mathbf{Q}$, $V=\mathbf{R}$
pro $u,v\in\mathbf{R}$ je: $u\oplus v = u+v$, pro $t\in\mathbf{Q}$, $u\in\mathbf{R}$ je: $t\circ u = u$

b) $T=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}^+$ (tj. množina všech kladných reálných čísel)
pro $u,v\in\mathbf{R}^+$ je: $u\oplus v = u\cdot v$, pro $t\in\mathbf{R}$, $u\in\mathbf{R}^+$ je: $t\circ u = u^t$

c) $T=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}^+$ (tj. množina všech kladných reálných čísel)
pro $u,v\in\mathbf{R}^+$ je: $u\oplus v = u+v$, pro $t\in\mathbf{R}$, $u\in\mathbf{R}^+$ je: $t\circ u = u^t$

d) $T=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{Z}$
pro $u,v\in\mathbf{Z}$ je: $u\oplus v = u+v$ pro $t\in\mathbf{R}$, $u\in\mathbf{Z}$ je: $t\circ u = [t{\cdot}u]$
kde $[t{\cdot}u]$ značí celou část z reálného čísla $t{\cdot}u$, tj. největší celé číslo, nepřevyšující číslo $t{\cdot}u$

e) $T=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$
pro $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ je: $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2) = (x_1+y_1\ ,\ x_2+y_2)$
pro $t\in\mathbf{R}$, $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ je: $t\circ(x_1,x_2) = (t{\cdot}x_1\ ,\ 0)$

f) $T=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$
pro $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ je: $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2) = (x_1{\cdot}y_1\ ,\ x_2{\cdot}y_2)$
pro $t\in\mathbf{R}$, $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ je: $t\circ(x_1,x_2) = (t{\cdot}x_1\ ,\ t{\cdot}x_2)$.

[3.1.B10]. Nechť V je vektorový prostor nad T; nechť $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, resp. $r,s\in T$. Dokažte, že platí:
a) $(-1)\cdot\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ b) $(-r)\cdot(-\mathbf{u}) = r\cdot\mathbf{u}$
c) $r\cdot\mathbf{u} = s\cdot\mathbf{u} \iff r=s \vee \mathbf{u}=\mathbf{o}$
d) $r\cdot\mathbf{u} = r\cdot\mathbf{v} \iff r=0 \vee \mathbf{u}=\mathbf{v}$.

[3.1.B11]. Nechť V je vektorový prostor nad T. Dokažte, že pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}\in V$ a pro libovolná dvě různá čísla $t,s\in T$ jsou vektory $t{\cdot}\mathbf{u}$ a $s{\cdot}\mathbf{u}$ také různé.

[3.1.B12]. Dokažte, že v definici vektorového prostoru lze axiom (iv) (tj. axiom : $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ pro $\forall\mathbf{u}\in V$) nahradit axiomem

$$(*)\quad t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{o} \implies t=0 \vee \mathbf{u}=\mathbf{o}\ .$$

(Návod: při důkazu "$(*) \implies$ (iv)" nejprve užitím axiomů (i),(ii),(iii) vektorového prostoru ukažte, že pro $t\neq 0$ je $t\cdot(1{\cdot}\mathbf{u}-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.)

§2: PODPROSTORY VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.2.A1]. U.p. podmnožiny M vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$, která
a) je nekonečná a není podprostorem v $\mathbf{Q}^4$
b) je konečná a je podprostorem v $\mathbf{Q}^4$.

[3.2.A2]. U.p. netriviálního podprostoru ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$.

[3.2.A3]. U.p. podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ tak, že
a) $(1,4,2) \in W \wedge (1,1,1) \notin W$ b) W obsahuje právě 3 vektory.

[3.2.A4]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že:
a) W_1, W_2 jsou disjunktní b) $W_1 \cap W_2 \subset \{(1,4,2)\}$
c) $W_1 \cap W_2 = \{(1,4,2)\}$ d) $W_1 \cap W_2 \supset \{(1,4,2)\}$.

[3.2.A5]. U.p. podmnožiny M ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby platilo:
a) $M \subset [M]$ b) $M = [M]$ c) $M \supset [M]$
d) $[M] = \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1)\}$.

[3.2.A6]. U.p. nekonečné množiny $M \subset \mathbf{Q}^2$ tak, že $[M] = \mathbf{Q}^2$.

[3.2.A7]. U.p. dvou podmnožin M, L ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ takových, že $M \neq L$, ale $[M] = [L]$.

[3.2.A8]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R}^2$ tak, že jejich součet $W_1 + W_2$ není přímým součtem.

[3.2.A9]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R}^4$ tak, že:
a) $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$ b) $W_1 \cup W_2 \supset W_1 + W_2$
c) $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ d) $W_1 \cup W_2 = W_1 \dotplus W_2$.

[3.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby součet dvou podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru V byl přímým součtem.

♣ ♣ ♣

[3.2.B1]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, je-li:
a) $W = \{(x, y.z) \mid x = \sqrt{2}y + \sqrt{3}z\}$
b) $W = \{(0, \sin x, \cos x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
c) $W = \{(x,y,z) \mid x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\}$
d) $W = \{(r, -2r, \sqrt{2}r) \mid r \in \mathbf{R}$ libovolné$\}$.

[3.2.B2]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{K}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{K}^3$, je-li:
a) $W = \{(0, (1+i)\cdot r, 0) \mid$ pro $\forall r \in \mathbf{R}\}$
b) $W = \{(z, i\cdot z, (2-i)\cdot z) \mid$ pro $\forall z \in \mathbf{K}\}$
c) $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid |z_1| = |z_2| = |z_3|\}$
d) $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid (1+i)z_1 + (2-i)z_2 - 3z_3 = 0\}$.

[3.2.B3]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$, je-li:
a) $W = \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1)\}$
b) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$
c) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$
d) $W = \{(2s+t, s-t, t, s) \mid t, s \in \mathbf{Q}$ libovolné$\}$.

[3.2.B4]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^n$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, je-li
a) $W = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$
b) $W = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$
c) $W = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{Z}\}$
d) $W = \{(r, 2\cdot r, \ldots, n\cdot r) \mid$ pro $\forall\, r \in \mathbf{R}\}$.

[3.2.B5]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^{(0,1)}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2]), je-li:
a) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$
b) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(0)\cdot f(1) = 0\}$
c) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(x) \geq 1$ pro konečně mnoho $x \in \langle 0,1\rangle\}$
d) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(x) = f(1-x)$ pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle\}$.

[3.2.B6]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]), je-li:
a) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0$ pouze pro konečně mnoho $x \in \mathbf{R}\}$
b) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = 0$ pouze pro konečně mnoho $x \in \mathbf{R}\}$
c) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ je nespojitá funkce$\}$
d) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ je shora ohraničená funkce$\}$.

[3.2.B7]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}[x]$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}[x]$, je-li:

a) $W = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R} \ \wedge \ a \neq 0\}$

b) $W = \{ax^5 + bx^2 + cx \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$

c) $W = \{f \in \mathbf{R}[x] \mid \exists g \in \mathbf{R}[x]$ tak, že $f = (x^2 + 1) \cdot g \}$

d) $W = \{f \in \mathbf{R}[x] \mid f(-x) = -f(x)$, pro $\forall x \in \mathbf{R}\}$.

[3.2.B8]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V. Rozhodněte, zda následující množiny jsou také podprostory ve V:

a) $(W_1 + W_2) \cap W_3$ b) $(W_1 + W_2) - W_3$

c) $(W_1 - W_2) \cap W_3$ d) $W_1 \times W_2 \times W_3$.

[3.2.B9]. Dokažte, že vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ nemůže být generován konečně mnoha vektory (tj. polynomy).

(Návod: důkaz veďte sporem, s využitím vlastností stupně polynomu.)

[3.2.B10]. Nechť W_α, kde $\alpha \in I \neq \emptyset$, jsou podprostory ve vektorovém prostoru V (nad T). Označme:

$$H = \bigcap W_\alpha \ (\alpha \in I).$$

Dokažte, že pak H je největší (vzhledem k $\subseteq$) podprostor ve V, který je obsažen v každém podprostoru W_α.

[3.2.B11]. Nechť M, L jsou podmnožiny ve vektorovém prostoru V. Dokažte, že platí:

a) $[\,\emptyset\,] = \{o\}$ b) $[\,[M]\,] = [M]$

c) $M \subseteq L \implies [M] \subseteq [L]$ d) $M \subseteq L \subseteq [M] \implies [M] = [L]$.

[3.2.B12]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V. Dokažte, že pak platí:

a) $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2 \iff W_1 \subseteq W_2$ nebo $W_2 \subseteq W_1$

b) $W_1 \cup W_2 = V \iff W_1 = V$ nebo $W_2 = V$.

[3.2.B13]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$W_1 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

[3.2.B14]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak dokažte, že:

a) $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$

b) v inkluzi a) obecně neplatí rovnost

c) jsou-li W_1, W_2 v inkluzi, pak v a) platí rovnost

d) jestliže v a) platí rovnost, pak W_1, W_2 nemusí být v inkluzi.

[3.2.B15]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak dokažte, že

a) $W_1 \cap (W_2 + W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$

b) v inkluzi a) obecně neplatí rovnost

c) jsou-li W_1, W_2 v inkluzi, pak v a) platí rovnost

d) jestliže v a) platí rovnost, pak W_1, W_2 nemusí být v inkluzi.

[3.2.B16]. Ve vektorovém prostoru V jsou dány podprostory W_1, W_2. Rozhodněte, zda součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$
$W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 2y + 3z\}$, $W_2 = \{(r, -2r, -3r) \mid$ pro $\forall r \in \mathbf{R}\}$

b) $V = \mathbf{R}^3$
$W_1 = \{(x, y, z) \mid x - 2y - 3z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \mid x = z\}$

c) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$
$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
$W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$

d) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$
$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 2x_n\}$,
$W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 3x_1 - 6x_2 = 0\}$

e) $V = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2])
$W_1 = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$,
$W_2 = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(x) = f(1 - x)$ pro $\forall x \in \langle 0, 1\rangle\}$

f) $V = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2])
$W_1 = \{f \in \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle} \mid f(1) = 0\}$,
$W_2 = \{f \in \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle} \mid f$ je konstantní funkce$\}$.

[3.2.B17]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$ jsou dány podprostory:

$$W_1 = \{(x - 1) \cdot g(x) \mid \text{ pro } \forall\, g(x) \in \mathbf{R}[x]\}$$
$$W_2 = \{(x - 2) \cdot h(x) \mid \text{ pro } \forall\, h(x) \in \mathbf{R}[x]\}.$$

Dokažte, že pak $\mathbf{R}[x] = W_1 + W_2$, přičemž součet není přímým součtem.

(Návod: ukažte nejprve, že $1 \in W_1 + W_2$, resp. $x^k \in W_1 + W_2$ pro každé přirozené číslo k.)

[3.2.B18]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$ jsou dány podprostory:

$$W_1 = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(x) = f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}$$
$$W_2 = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(x) = -f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}.$$

Dokažte, že prostor $\mathbf{R}[x]$ je přímým součtem podprostorů W_1, W_2.

[3.2.B19]. Nechť W, W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V a dále nechť $V = W_1 \dot{+} W_2$. Potom:

a) jestliže $(W \supseteq W_1 \ \vee \ W \supseteq W_2)$, pak $W = (W \cap W_1) \dot{+} (W \cap W_2)$

b) ukažte na příkladu, že předpoklad $(W \supseteq W_1 \ \vee \ W \supseteq W_2)$ nelze v a) vypustit.

(Návod: příklad pro b) hledejte např. v prostoru $V = \mathbf{R}^2$.)

[3.2.B20]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Potom dokažte, že:

a) součet $W_1 + \cdots + W_k$ je přímý $\Longrightarrow$ $W_i \cap W_j = \{\mathbf{o}\}$ pro $\forall\, i \neq j$

b) je-li $k = 2$, pak platí i opačná implikace

c) je-li $k \geq 3$, pak opačná implikace někdy platí a někdy neplatí.

(Návod: část c) ukažte na příkladech, např. v prostoru $V = \mathbf{R}^3$.)

[3.2.B21]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory nenulového vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda následující výrok je či není nutnou podmínkou, resp. zda je či není dostatečnou podmínkou pro to, aby součet $W_1 + W_2 + W_3$ byl přímým součtem:

a) $W_1 + W_2 + W_3 = \{\mathbf{o}\}$ b) $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{o}\}$.

c) $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = V$

d) $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{\mathbf{o}\}$

[3.2.B22]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) součet podprostorů $W_1 + \cdots + W_k$ je přímým součtem

(ii) $\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$

(iii) existuje vektor $\mathbf{u} \in W_1 + \cdots + W_k$, který lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$.

[3.2.B23]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že jestliže součet podprostorů $W_1 + \cdots + W_k$ není přímým součtem, pak žádný vektor $\mathbf{u} \in W_1 + \cdots + W_k$ nelze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$.

§3: LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

[3.3.A1]. U.p. tří různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$, které

a) generují prostor $\mathbf{R}^2$ b) negenerují prostor $\mathbf{R}^2$.

[3.3.A2]. U.p. různých vektorů (tj. polynomů) $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}_2[x]$, které

a) generují prostor $\mathbf{R}_2[x]$ b) negenerují prostor $\mathbf{R}_2[x]$.

[3.3.A3]. U.p. různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$ tak, že vektor $\mathbf{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbf{R}^4$, jako vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

[3.3.A4]. U.p. vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ tak, aby vektor $\mathbf{u}$ generoval jiný podprostor v $\mathbf{R}^3$, než vektor $\sqrt{2} \cdot \mathbf{u}$.

[3.3.A5]. U.p. nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Q}^3$ tak, aby

a) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ b) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$.

[3.3.A6]. U.p. vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^4$, které jsou lineárně závislé a přitom vektor $\mathbf{u}_1$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

[3.3.A7]. U.p. tří vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{Q}^4$ takových, že

a) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé

b) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.

[3.3.A8]. U.p. nekonečně mnoha vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \ldots$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby každé dva z nich byly lineárně nezávislé.

[3.3.A9]. U.p. vektorů z $\mathbf{R}^3$, které

a) jsou lineárně nezávislé a negenerují prostor $\mathbf{R}^3$

b) jsou lineárně nezávislé a generují prostor $\mathbf{R}^3$

c) jsou lineárně závislé a negenerují prostor $\mathbf{R}^3$

d) jsou lineárně závislé a generují prostor $\mathbf{R}^3$.

[3.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z vektorového prostoru V byly lineárně nezávislé.

♣ ♣ ♣

[3.3.B1]. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ generují tentýž podprostor ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_1 = (2,-1,3,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,-1)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,-1,2,-3)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,2,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,2,0,3)$.

[3.3.B2]. Rozhodněte, zda dané vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$ generují vektorový prostor $\mathbf{Q}^4$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,2,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_4 = (-2,0,-1,-3)$, $\mathbf{u}_5 = (-1,1,0,-2)$

b) $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,0,1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{u}_4 = (2,3,4,6)$, $\mathbf{u}_5 = (1,-3,5,-7)$.

[3.3.B3]. Rozhodněte, zda dané vektory (polynomy) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ generují vektorový prostor $\mathbf{R}_2[x]$, je-li:

a) $\mathbf{f}_1 = x+1$, $\mathbf{f}_2 = x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_3 = x^2-2x-3$

b) $\mathbf{f}_1 = x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_2 = x^2-2x-3$, $\mathbf{f}_3 = 2x+3$.

[3.3.B4]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ jsou vektory z vektorového prostoru V (nad T) takové, že platí:

$$2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \quad \wedge \quad 5\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_4 = \mathbf{o}$$

Dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ generují tentýž podprostor ve V, jako vektory $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.

[3.3.B5]. Nalezněte všechna $r \in \mathbf{R}$, pro která vektor $\mathbf{w} = (r, 1, 2)$ leží v podprostoru $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-1,3)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,2)$

c) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-1,1)$

d) $\mathbf{u}_1 = (1,1,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,r)$, $\mathbf{u}_3 = (-r,-4,r^2)$.

[3.3.B6]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]) jsou dány vektory (tj. zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$):

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = \cos x, \qquad g_1(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2}, \qquad g_2(x) = \cos^2 \tfrac{x}{2}.$$

Potom:

a) popište množinu $[f_1, f_2]$ b) dokažte, že $[f_1, f_2] = [g_1, g_2]$.

[3.3.B7]. Nechť V je vektorový prostor (nad T), nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Dokažte, že platí:

a) $[\mathbf{u}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}-\mathbf{u}]$ b) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w}]$.

[3.3.B8]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ jsou vektory splňující: $\mathbf{w} \notin [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \ \wedge \ \mathbf{w} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}]$.
Dokažte, že pak je $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}]$.

[3.3.B9]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ jsou vektory splňující: $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} + t_3\mathbf{w} = \mathbf{o}$, přičemž $t_1 \cdot t_3 \neq 0$. Potom:

a) dokažte, že $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

b) ukažte, že bez předpokladu $t_1 \cdot t_3 \neq 0$ předchozí rovnost neplatí.

[3.3.B10]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V (nad T) takové, že W_1 je generován vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, resp. W_2 je generován vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$. Dokažte, že pak součet podprostorů $W_1 + W_2$ je generován vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$.

[3.3.B11]. Rozhodněte, zda dané vektory z vektorového prostoru V jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé, je-li:

a) $V = \mathbf{Q}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,2,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-3,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,2)$

b) $V = \mathbf{Q}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,2)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,-8)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (0,-1,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,-1,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,1,1)$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-4,1,1,-3)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-3,1,-1)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,1)$

e) $V = \mathbf{K}^3$; $\mathbf{u}_1 = (10, 8-14i, 2+4i)$, $\mathbf{u}_2 = (2+i, 3-2i, i)$

f) $V = \mathbf{K}^3$; $\mathbf{u}_1 = (2, 2+2i, 2i)$, $\mathbf{u}_2 = (1-i, 1+3i, -1+i)$, $\mathbf{u}_3 = (1+i, 1-i, 1+i)$

g) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = 2x^2+x-4$, $\mathbf{f}_2 = x^2-3$, $\mathbf{f}_3 = (x+1)^2$

h) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = x^2+x+1$, $\mathbf{f}_2 = x \cdot (x^2+x+1)$, $\mathbf{f}_3 = (x+1)^2$.

[3.3.B12]. Uvažme množinu komplexních čísel $\mathbf{K}$ jako vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b)).
Dokažte, že v tomto vektorovém prostoru jsou každá tři komplexní čísla lineárně závislá.

[3.3.B13]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2]) uvažme dva různé vektory (tj. zobrazení $\langle 0,1 \rangle \to \mathbf{R}$) $f \neq g$.
Potom:

a) dokažte, že když existuje $x_0 \in \langle 0,1 \rangle$ tak, že
$$f(x_0) = g(x_0) \neq 0,$$
potom jsou f, g lineárně nezávislé

b) ukažte na příkladech, že když neexistuje žádné $x_0 \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$, pak f, g mohou být jak lineárně závislé, tak i lineárně nezávislé.

[3.3.B14]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]) jsou dány vektory (tj. zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) f, g, h.
Dokažte, že f, g, h jsou lineárně závislé. Přitom:

a) $f = 1$, $g = \cos x$, $h = \cos^2 \frac{x}{2}$

b) $f = \sqrt{2}$, $g = \sin^2 x$, $h = \cos^2 x$

c) $f = \sin x$, $g = \cos x$, $h = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

d) $f = e^x$, $g = \sin x + \cos x$, $h = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

(Návod: přímou úpravou, užitím známých vztahů pro goniometrické funkce, sestavujte rovnici $t_1 \cdot f + t_2 \cdot g + t_3 \cdot h = 0$.)

[3.3.B15]. Dokažte, že dané vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^3$ jsou lineárně závislé a nalezněte mezi nimi všechny vektory, které nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících.
Přitom:
a) $\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (1, \sqrt{2}, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (-\sqrt{2}, -2, 2)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -2)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (2, \sqrt{2}, 1)$.

[3.3.B16]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které jsou tyto vektory lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé.
Přitom:
a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, a, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 2, a)$
b) $\mathbf{u} = (0, 2, a)$, $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{w} = (2, -4, a)$
c) $\mathbf{u} = (a, 4, 11)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 4)$.

[3.3.B17]. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů jsou zadané vektory z $\mathbf{Q}^4$ lineárně závislé:
a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2+a, 4, 6)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3-b, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 4, b-6, 7)$,
$\mathbf{u}_4 = (1, 2-a, 2-b, 1)$
b) $\mathbf{u}_1 = (a, b, c, d)$, $\mathbf{u}_2 = (b, -a, d, -c)$, $\mathbf{u}_3 = (c, -d, -a, b)$,
$\mathbf{u}_4 = (d, c, -b, -a)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, b, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (c, 1, 1, 1)$
d) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a+1, a^4+3a^2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, a+1, 1, a^3+3a^2)$,
$\mathbf{u}_3 = (a+1, 1, 1, a^2+3a)$.

[3.3.B18]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda následující vektory z V jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé:
a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$, $(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
b) $(2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+3\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+4\mathbf{v}-\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+5\mathbf{v}+4\mathbf{w})$
c) $(3\mathbf{u}+4\mathbf{v}+5\mathbf{w})$, $(4\mathbf{u}+3\mathbf{v}+5\mathbf{w})$, $(5\mathbf{u}+4\mathbf{v}+3\mathbf{w})$
d) $(\mathbf{u}-2\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w})$, $(7\mathbf{u}+14\mathbf{v}-13\mathbf{w})$.

[3.3.B19]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda vektory:

$$\mathbf{u}_1 \, , (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2) \, , (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3) \, , \ldots, \, (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+\cdots+k\cdot\mathbf{u}_k)$$

jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé.

[3.3.B20]. Nechť V je vektorový prostor (nad T) a nechť $\mathbf{u} \in V$. Dokažte, že platí : vektor $\mathbf{u}$ je lineárně závislý $\iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

[3.3.B21]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$. Dokažte, že potom platí:
a) vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé $\wedge$ vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou lineárně závislé $\implies \mathbf{d} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.
b) vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé $\wedge$ $\mathbf{c} \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \implies \mathbf{a} = \mathbf{o}$ nebo $\exists\, t \in T : \ \mathbf{b} = t \cdot \mathbf{a}$.

[3.3.B22]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k \geq 2)$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V (nad T) taková, že $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že pak:
vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff$ existuje vektor $\mathbf{u}_i$ $(2 \leq i \leq k)$, který je lineární kombinací předcházejících vektorů (tj. vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$).

[3.3.B23]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k \geq 2)$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V (nad T) taková, že $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že pak:
vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff$ existuje vektor $\mathbf{u}_i$ $(1 \leq i \leq k-1)$, který je lineární kombinací následujících vektorů (tj. vektorů $\mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_k$).

[3.3.B24]. Nechť ve vektorovém prostoru V (nad T) jsou dány lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ a vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že potom nejvýše jeden vektor z posloupnosti vektorů $\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je lineární kombinací předchozích vektorů.
(Návod: důkaz veďte sporem .)

[3.3.B25]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V (nad T) takové, že jejich součet je přímým součtem. Nechť dále $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in W_1$ jsou lineárně nezávislé vektory a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in W_2$ jsou lineárně nezávislé vektory.
Dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé.

§4: BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.4.A1]. U.p. vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$, které
a) jsou generátory, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$
b) jsou lineárně nezávislé, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$.

[3.4.A2]. U.p. vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{Q}^2$, které
a) jsou lineárně nezávislé   b) negenerují vektorový prostor $\mathbf{Q}^2$.

[3.4.A3]. Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$
a) generují vektorový prostor $\mathbf{Q}^n$
b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_n[x]$.

[3.4.A4]. Uveďte, co všechno můžete říci o čísle s, víte-li, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$
a) generují vektorový prostor $\mathbf{R}_5[x]$
b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}^5$.

[3.4.A5]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ takových, že průnik $W_1 \cap W_2$
a) nemá bázi b) má bázi $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (3,2,1)$.

[3.4.A6]. U.p. jednodimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_4[x]$.

[3.4.A7]. U.p. dvoudimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že:
a) W obsahuje vektor $(\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}, 7)$
b) W obsahuje vektory $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$.

[3.4.A8]. U.p. podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ takových, že
a) $\dim W_1 = \dim W_2 \;\wedge\; W_1 \neq W_2$
b) $\dim W_1 = \dim W_2 \;\wedge\; W_1 \subset W_2$.

[3.4.A9]. U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$ takových, že jejich součet je přímým součtem.

[3.4.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná i dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ byly bází vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$.

♣ ♣ ♣

[3.4.B1]. Rozhodněte, zda zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V, je-li
a) $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = (2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-3,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (5,4,3)$
b) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (1,5,5,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,3,-1)$,
$\mathbf{u}_3 = (1,-1,1,2)$, $\mathbf{u}_4 = (1,8,7,-7)$
c) $V = \mathbf{R}_2[x]$; $\mathbf{f}_1 = 2x^2 + 3x - 5$, $\mathbf{f}_2 = x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_3 = 3x^2 + 2x - 2$
d) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = x^2 + x$, $\mathbf{f}_2 = x^3 + 2x^2$, $\mathbf{f}_3 = x^3 + x^2 - x - 1$,
$\mathbf{f}_4 = x^3 - 1$.

[3.4.B2]. Nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoří bázi vektorového prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda následující vektory také tvoří bázi tohoto vektorového prostoru V:
a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{v}-\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$
b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$
c) $(2\mathbf{u}+\mathbf{v}+3\mathbf{w})$, $(\mathbf{v}+2\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}-\mathbf{v}+7\mathbf{w})$
d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+2\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+\mathbf{v}-4\mathbf{w})$.

[3.4.B3]. Určete všechny hodnoty parametrů, pro něž zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V, je-li:
a) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u}_1 = (2,3,a)$, $\mathbf{u}_2 = (3,4,2a)$, $\mathbf{u}_3 = (5,8,1+2a)$
b) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,a,b)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,c)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,1)$
c) $V = \mathbf{R}_2[x]$; $\mathbf{f}_1 = ax^2 - 4x - 1$, $\mathbf{f}_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $\mathbf{f}_3 = x^2 + x - a$
d) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = 3x^3 - 2ax^2 + 1$, $\mathbf{f}_2 = x^3 - 1$, $\mathbf{f}_3 = x^2 + x + 1$.

[3.4.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$
a) nalezněte bázi, která obsahuje vektor $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,4)$
b) nalezněte dvě báze, které mají společné právě vektory
$\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1,1)$.

[3.4.B5]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ nechť je zadán podprostor $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a vektor $\mathbf{v} \in W$.
Nalezněte bázi podprostoru W, která obsahuje vektor $\mathbf{v}$, je-li:
a) $\mathbf{u}_1 = (1,0,-2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-1,-2,0)$;
$\mathbf{v} = (2,1,1,2)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1,1,4,3)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,4,6,5)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,2,2)$;
$\mathbf{v} = (3,-2,2,1)$.

[3.4.B6]. Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru V, je-li
a) $V = \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{K}$ (viz cvičení [3.1.B1] a))
b) $V = \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b))
c) $V = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ (viz cvičení [3.1.B1] d))
d) $V = \mathbf{R}^A$, kde $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ (viz cvičení [3.1.B6])
e) $V = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{R}$, přičemž sčítání vektorů a násobení reálného čísla s vektorem je definováno "po složkách".

[3.4.B7]. Dokažte, že vektorový prostor V nemá bázi. Přitom :
a) $V = \mathbf{R}[x]$ b) $V = \mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2])
c) $V = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (viz cvičení [3.1.B4]) d) $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ (viz cvičení [3.1.B7]).
(Návod: ukažte, že pro každé přirozené n lze ve V vždy sestrojit n lineárně nezávislých vektorů.)

[3.4.B8]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 2)$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Dokažte, že potom:

a) vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n$ jsou bází prostoru V

b) vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$ jsou pro libovolná $t_1, \ldots, t_{n-1} \in T$ také bází prostoru V.

Definice. Řekneme, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ je *minimální systém generátorů prostoru* V, jestliže :

(i) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = V$

(ii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_n] \subset V$ pro každé $i = 1, \ldots, n$

tzn. jinými slovy řečeno: vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují prostor V, ale vynecháme-li libovolný z nich, pak zbývající vektory již prostor V negenerují.

[3.4.B9]. Dokažte, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je bází vektorového prostoru V právě když je minimálním systémem generátorů prostoru V.

[3.4.B10]. Ve vektorovém prostoru V je dán podprostor W. Nalezněte bázi a dimenzi tohoto podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^5$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 = 0 \ \wedge \ x_4 + x_5 = 0\}$

b) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = x_n\}$

c) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$

d) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

e) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i = 0 \text{ pro sudé } i\}$

f) $V = \mathbf{R}_5[x]$, $W = \{f(x) \mid f(x) = f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}$.

[3.4.B11]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ je dán podprostor

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}.$$

Pak:

a) ukažte, že vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé a leží ve W

b) určete dimenzi podprostoru W

c) doplňte vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ na bázi podprostoru W.

[3.4.B12]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^4$ nechť je zadán podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$. Z generátorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ podprostoru W vyberte všechny možné báze W. Přitom:

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{u}_4 = (3, 6, 0, 0)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\mathbf{u}_4 = (4, 5, 6, 7)$

c) $\mathbf{u}_1 = (2, 1, -3, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 2, -6, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (6, 3, -9, 3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$

d) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 1, -1)$

[3.4.B13]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ nechť je zadán podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5]$. Z generátorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ podprostoru W vyberte nějakou bázi W a potom každý z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ vyjádřete pomocí této báze. Přitom:

a) $\mathbf{u}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\mathbf{u}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\mathbf{u}_5 = (7, -6, -7, 0)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, -4, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -5, 8, -3)$, $\mathbf{u}_4 = (5, 26, -9, -12)$, $\mathbf{u}_5 = (3, -4, 1, 2)$.

[3.4.B14]. V závislosti na parametrech určete dimenzi podprostoru W ve vektorovém prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, a, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 2, a)$

b) $V = \mathbf{R}^3$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, kde $\mathbf{u}_1 = (5, 7, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (2a, 1, -2)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, b, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (c, 1, 1, 1)$.

[3.4.B15]. Nechť V je vektorový prostor nad T takový, že $\dim V = n$. Dokažte, že pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$ existuje ve V podprostor, jehož dimenze je rovna k.

[3.4.B16]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V (nad T). Dokažte, že platí:

$$\dim\,(W_1 + W_2) = \dim\,(W_1 \cap W_2) + 1 \implies W_1 \subset W_2 \text{ nebo } W_2 \subset W_1.$$

(Návod: důkaz veďte sporem.)

[3.4.B17]. Určete bázi a dimenzi průniku podprostorů $W_1 \cap W_2$ ve vektorovém prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 3)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 1, 3, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 1, 3)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$

d) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 2, -1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 4, -4, 7, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (0, 2, -3, 4, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 1, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 6, -5, 12, 3)$.

[3.4.B18]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V, přičemž : $\dim V = 2$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$.
Dokažte, že pak je buď $W_1 = W_2$ nebo $V = W_1 \dotplus W_2$.

[3.4.B19]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V takového, že $\dim V = 3$.
Dokažte, že pak platí:

a) $\dim W_1 = \dim W_2 = 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow W_1 = W_2$ nebo $(W_1 + W_2 = V \wedge \dim (W_1 \cap W_2) = 1)$

b) $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2 \Longrightarrow W_1 \subset W_2$ nebo $V = W_1 \dotplus W_2$

c) $\dim W_1 = \dim W_2 = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow W_1 = W_2$ nebo $(W_1 \cap W_2 = \{o\} \wedge \dim (W_1 + W_2) = 2)$.

[3.4.B20]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V takové, že prostor V je jejich přímým součtem (tj. $V = W_1 \dotplus W_2$). Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ je báze W_1 , resp. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ je báze W_2.
Dokažte, že pak $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ je báze prostoru V.

[3.4.B21]. Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor $(n \geq 1)$ a nechť W_1 je libovolný podprostor ve V .
Dokažte, že ve vektorovém prostoru V existuje podprostor W_2 takový, že platí: $V = W_1 \dotplus W_2$.

[3.4.B22]. Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor $(n \geq 1)$ a nechť U, W_1, W_2 jsou podprostory ve V takové, že platí:

$$W_1 \subseteq W_2 \quad \wedge \quad U \cap W_1 = U \cap W_2 \quad \wedge \quad U + W_1 = U + W_2 .$$

Dokažte, že potom je $W_1 = W_2$.
(Návod: stačí dokázat (proč?), že $\dim W_1 = \dim W_2$.)

[3.4.B23]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \quad \mathbf{u}_2 = (0,1,1,1), \quad \mathbf{u}_3 = (0,0,1,1), \quad \mathbf{u}_4 = (0,0,0,1).$$

Vyjádřete pak souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (2,1,1,4)$

a) v bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$

b) v bázi $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_1$.

[3.4.B24]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_5[x]$ nalezněte souřadnice vektoru (tj. polynomu) $f = 2x^5 - x^3 - 5x^2 + 4$ v bázi :

a) $x^5 + x^4$, $x^4 + 2x^3$, $2x^3 + 3x^2$, $3x^2 + 4x$, $4x + 5$, $x + 1$

b) $x^5 + 2x^2$, $x^4 + 4$, $x^3 + x$, $3x^5 + x$, $x^4 + 3x^2$, $x^2 + 1$

c) 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$, $(x-1)^4$, $(x-1)^5$.

(Návod: při c) využijte Taylorovu větu, kterou znáte z analýzy.)

[3.4.B25]. Nalezněte bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, v níž vektor $\mathbf{u} = (1,0,0)$ má souřadnice $(1,1,1)$ a vektor $\mathbf{v} = (1,1,1)$ má souřadnice $(1,0,0)$.
Uveďte, kolik takových bází existuje.

KAPITOLA 4:

MATICE A DETERMINANTY

§1: POŘADÍ A PERMUTACE

[4.1.B1]. Určete počet inverzí v daném pořadí z 9-ti prvků:
a) $(2,1,7,9,8,6,5,3,4)$ b) $(9,8,7,6,5,4,3,2,1)$.

[4.1.B2]. Určete počet inverzí v daném pořadí z $2n$ prvků:
a) $(1,3,\dots,2n-1,2,4,\dots,2n)$ b) $(2,4,\dots,2n,1,3,\dots,2n-1)$
c) $(2n,2n-1,2n-2,\dots,2,1)$ d) $(2n-1,2n,\dots,3,4,1,2)$.

[4.1.B3]. Určete počet inverzí v daném pořadí z $3n$ prvků:
a) $(3,6,\dots,3n,1,4,\dots,3n-2,2,5,\dots,3n-1)$
b) $(1,4,\dots,3n-2,2,5,\dots,3n-1,3,6,\dots,3n)$
c) $(2,5,\dots,3n-1,3,6,\dots,3n,1,4,\dots,3n-2)$.

[4.1.B4]. Nechť v pořadí $(r_1,r_2,\dots,r_n)$ je celkem I inverzí. Určete počet inverzí v pořadí $(r_n,r_{n-1},\dots,r_2,r_1)$.

[4.1.B5]. Prvky $1,2,\dots,n$ rozdělme na dvě části takto:
$r_1<\dots<r_k$, resp. $s_1<\dots<s_{n-k}$, kde $1\le k\le n-1$.
Určete počet inverzí v pořadí $(r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_{n-k})$.

[4.1.B6]. Nechť $(r_1,r_2,\dots,r_n)$ je pořadí z n prvků, v němž je I inverzí. Utvoříme-li z prvků $r_1,r_2,\dots,r_n$ pořadí $(1,2,\dots,n)$, pak indexy těchto prvků utvoří jisté pořadí, v němž je rovněž I inverzí. Dokažte.

[4.1.B7]. Určete x,y tak, aby pořadí
a) $(1,2,7,4,x,5,6,y,9)$ bylo sudé b) $(5,1,y,8,9,4,x,6,3)$ bylo liché.

[4.1.B8]. Rozhodněte, kdy daná dvě pořadí z n prvků ($n\ge 3$):
$(r_1,r_2,\dots,r_{n-1},r_n)$ a $(r_2,r_3,\dots,r_n,r_1)$
mají stejnou paritu, resp. různou paritu.

[4.1.B9]. Seřaďte všechna pořadí ze 4 prvků tak, že každé pořadí obdržíte z předcházejícího pořadí provedením jedné transpozice. Přitom:
a) pořadí $(4,2,1,3)$ bude napsáno jako první
b) pořadí $(1,3,4,2)$ bude napsáno jako poslední
c) pořadí $(4,2,1,3)$ bude napsáno jako první a pořadí $(1,3,4,2)$ bude napsáno jako poslední.

[4.1.B10]. Vypište všechny formálně různé zápisy dané permutace:
a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$.

[4.1.B11]. Zjistěte paritu permutace P, je-li:
a) $P=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n-1&n\\n&n-1&\dots&2&1\end{pmatrix}$
b) $P=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\dots&2n&2n-1\end{pmatrix}$
c) $P=\begin{pmatrix}3&6&\dots&3n&1&4&\dots&3n-2&2&5&\dots&3n-1\\1&4&\dots&3n-2&2&5&\dots&3n-1&3&6&\dots&3n\end{pmatrix}$
d) $P=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n&n+1&n+2&\dots&2n&2n+1&2n+2&\dots&3n\\3&6&\dots&3n&2&5&\dots&3n-1&1&4&\dots&3n-2\end{pmatrix}$.

[4.1.B12]. Nalezněte permutace $R\circ P$ a $P\circ R$, je-li dáno:
a) $P=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$ $R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&2&4\end{pmatrix}$
b) $P=\begin{pmatrix}4&2&1&3&5&6&7\\1&7&2&5&4&6&3\end{pmatrix}$ $R=\begin{pmatrix}7&5&3&1&2&4&6\\1&5&6&2&4&7&3\end{pmatrix}$.

[4.1.B13]. Nechť jsou dány permutace:
$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&3&1&4&6&2&7\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&6&3&4&2&5\end{pmatrix}.$$
Pak nalezněte permutaci:
a) $P\circ R^2$ b) $P\circ R\circ P^{-1}$ c) $P^{-2}\circ R$.

[4.1.B14]. Nechť jsou dány permutace:
$$R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&3&5&2\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}.$$
Pak nalezněte všechny permutace X, splňující vztah:
a) $R\circ X\circ S=T$ b) $S\circ X\circ R=T$.

[4.1.B15]. Pro zadanou permutaci P nalezněte všechny permutace X takové, že platí: $P \circ X = X \circ P$. Přitom:

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[4.1.B16]. Nechť $S_3 = \{e, r, s, t, u, v\}$ značí množinu všech permutací 3-prvkové množiny, přičemž

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom:

a) napište tabulku operace grupy $(S_3, \circ)$
b) nalezněte všechny podgrupy v grupě $(S_3, \circ)$
c) značí-li $\mathcal{P}$ množinu všech podgrup grupy $(S_3, \circ)$, pak nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

(Návod: při b) využijte faktu, že v $(S_3, \circ)$ neexistuje žádná 4-prvková, ani 5-prvková podgrupa.)

[4.1.B17]. Nechť $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{T}$ značí množinu všech sudých, resp. všech lichých permutací 3-prvkové množiny; nechť $\circ$ značí skládání permutací. Rozhodněte, zda $(\mathcal{S}, \circ)$, resp. $(\mathcal{T}, \circ)$ jsou grupy.

[4.1.B18]. Nechť G je množina všech sudých permutací na 4-prvkové množině, přičemž prvky množiny G označíme takto:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$o = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť $\circ$ značí skládání permutací. Potom:

a) napište tabulku operace $\circ$ a dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa

b) víte-li, že v $(G, \circ)$ kromě triviálních podgrup existují ještě právě 3 dvouprvkové, 4 tříprvkové a jedna čtyřprvková podgrupa, pak nalezněte všechny tyto podgrupy
c) nechť $\mathcal{P}$ značí množinu všech podgrup grupy $(G, \circ)$. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

§2: DETERMINANTY

[4.2.A1]. U.p. čtvercové matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že $\det A$ má právě 16 členů.

[4.2.A2]. U.p. čtvercové matice A řádu 5 (nad $\mathbf{Q}$), jejíž všechny prvky jsou nenulové, ale $\det A = 0$.

[4.2.A3]. U.p. matice A řádu n (nad $\mathbf{K}$) tak, aby $\det A = c$, kde c je libovolné, pevné komplexní číslo.

[4.2.A4]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) tak, aby $|A'| = -|A|$.

[4.2.A5]. Nechť A je matice řádu 5 (nad $\mathbf{R}$) taková, že $|A| = \sqrt{2}$. Nechť matice B vznikne z matice A tak, že každý její prvek vynásobíme číslem $-\sqrt{3}$. Uveďte, čemu se rovná $|B|$.

[4.2.A6]. Nechť A je matice řádu 6 (nad $\mathbf{R}$) a nechť jsou pevně zvoleny 3 její sloupce. Uveďte, kolik submatic řádu 3 lze ze zvolených sloupců vybrat.

[4.2.A7]. Nechť A je matice řádu n (nad T) a nechť $0 < k < n$ je celé číslo. Uveďte, kolik submatic řádu k lze v matici A sestrojit.

[4.2.A8]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| \neq 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nulové.

[4.2.A9]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| = 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nenulové.

[4.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby determinant čtvercové matice A byl nenulový.

♣ ♣ ♣

[4.2.B1]. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:

a) $n = 6$; $a_{31} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{52} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$
b) $n = 6$; $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{41} \cdot a_{56} \cdot a_{65} \cdot a_{22}$
c) $n = 8$; $a_{72} \cdot a_{17} \cdot a_{43} \cdot a_{21} \cdot a_{64} \cdot a_{35} \cdot a_{56}$
d) $n = 8$; $a_{72} \cdot a_{61} \cdot a_{58} \cdot a_{47} \cdot a_{84} \cdot a_{16} \cdot a_{35} \cdot a_{23}$.

[4.2.B2]. Určete (v závislosti na i,j, resp. k) znaménko daného členu determinantu matice $A=(a_{ij})$ řádu n je-li :

a) $n=5$; $a_{31}\cdot a_{1i}\cdot a_{54}\cdot a_{43}\cdot a_{2j}$

b) $n=5$; $a_{i1}\cdot a_{j5}\cdot a_{2i}\cdot a_{1j}\cdot a_{5k}$

c) $n=6$; $a_{23}\cdot a_{1i}\cdot a_{42}\cdot a_{65}\cdot a_{3j}\cdot a_{5k}$

d) $n=6$; $a_{35}\cdot a_{66}\cdot a_{2i}\cdot a_{5j}\cdot a_{1k}\cdot a_{i1}$.

[4.2.B3]. Uveďte všechny členy determinantu dané matice $A=(a_{ij})$ řádu 4, které:

a) obsahují prvky a_{12} , a_{34}

b) obsahují prvek a_{23} a mají znaménko minus.

[4.2.B4]. Určete znaménko, s nímž se v determinantu matice $A=(a_{ij})$ řádu n vyskytuje součin prvků

a) hlavní diagonály b) vedlejší diagonály.

[4.2.B5]. Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B6]. Bez užití definice determinantu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a_1+b_1 & a_1+c_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+c_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

[4.2.B7]. Spočtěte determinant :

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

[4.2.B8]. Spočtěte (nad tělesem komplexních čísel) determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2+i & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3-2i & 1-i \\ 2-3i & 1+i & 1+2i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$,

kde $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ kde $z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

[4.2.B9]. Nechť je dána matice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Pak spočtěte minor $|B|$, resp. doplněk minoru $|B|$, resp. algebraický doplněk minoru $|B|$, jestliže submatice B je vytvořena

a) 1. a 3. řádkem a 2. a 3. sloupcem matice A

b) 2., 3., 4. řádkem a 1., 2., 4. sloupcem matice A.

[4.2.B10]. Nechť je dána matice $A=(a_{ij})$ z předchozího cvičení. Spočtěte algebraický doplněk A_{23} , resp. A_{33} , resp. A_{41} .

[4.2.B11]. Spočtěte determinant

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B12]. Pouze užitím Laplaceovy věty a definice determinantu spočtěte:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B13]. Užitím Laplaceovy věty spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(Návod: nejprve proveďte rozvoj podle 1. sloupce.)

[4.2.B14]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu $n \geq 3$ (nad T) taková, že $a_{11} \neq 0$. Dokažte, že pak platí :

$$|A| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} .$$

(Návod: determinant $|A|$ upravujte tak, aby pod prvkem a_{11} vznikly samé nuly a potom použijte Laplaceovu větu.)

[4.2.B15]. Opakovaným užitím výsledku předchozího cvičení a úpravou (vytknutím z jednoho řádku, resp. sloupce) vypočtěte determinanty ze cvičení [4.2.B11].

[4.2.B16]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n (nad T) a nechť $p \in T$ je pevný prvek. Utvořme matici B tak, že ke každému prvku matice A přičteme číslo p, tzn. $B = (a_{ij} + p)$. Dokažte, že pak :

$$|B| = |A| + p \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

kde A_{ij} značí algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

[4.2.B17]. Nechť $n \geq 2$; užitím Cauchyovy věty vypočtěte determinant:

a) $$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_2 - y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \dots & x_n - y_n \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} \sin(x_1 + y_1) & \sin(x_1 + y_2) & \dots & \sin(x_1 + y_n) \\ \sin(x_2 + y_1) & \sin(x_2 + y_2) & \dots & \sin(x_2 + y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(x_n + y_1) & \sin(x_n + y_2) & \dots & \sin(x_n + y_n) \end{vmatrix}$$

(Návod: danou matici vyjádřete nejprve jako součin dvou vhodných matic.)

[4.2.B18]. Užitím úprav, které nemění hodnotu determinantu, spočtěte determinant dané matice řádu $n \geq 2$:

a) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 \dots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

[4.2.B19]. Spočtěte determinant dané matice řádu $n \geq 2$:

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 2 \dots n-2 & n-1 \\ a_1 & a_2 & 1 \dots n-3 & n-2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

e) $$\begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

f) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 \dots & n & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n-1 & n & 1 \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

[4.2.B20]. Nechť A_n značí matici řádu n. Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

a) $|A_n| = 2^{n+1} - 1$, kde $A_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $|A_n| = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$, kde $A_n = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{bmatrix}$

c) $|A_n| = \dfrac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$, pro $x \neq y$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} x+y & x \cdot y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & x \cdot y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{bmatrix}$$

d) $|A_n| = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{bmatrix}$$

[4.2.B21]. Nechť A_k značí matici řádu k; dokažte, že

a) pro každé $n \geq 2$ a $x \neq y$ platí:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot x \cdot y \cdot (x^{n-1} - y^{n-1})}{x - y}$$

b) pro každé $n \geq 1$ platí:

$$|A_{2n}| = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & y & \dots & x & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = (x^2 - y^2)^n$$

c) pro každé $n \geq 1$ platí:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \equiv 0,1 \pmod 6 \\ 0 & \text{pro } n \equiv 2,5 \pmod 6 \\ -1 & \text{pro } n \equiv 3,4 \pmod 6 \end{cases}$$

[4.2.B22]. Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tzn. každý polynom stupně $n \geq 1$ se uvedeným způsobem dá vyjádřit ve tvaru determinantu matice řádu $n+1$.

[4.2.B23]. Nechť A_n značí matici řádu n. Dokažte, že pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí:

a) je-li $x \neq k\pi$ $(k \in \mathrm{Z})$, pak

$$|A_n| = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \quad \text{kde } A_n = \begin{bmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x \end{bmatrix}$$

b) $|A_n| = \cos nx$, kde $A_n = \begin{bmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{bmatrix}$

(Návod: při výpočtu b) rozvíjejte determinant podle posledního řádku.)

[4.2.B24]. Dokažte, že pro každé přirozené n platí: $|A_n| = |B_n|$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

(Návod: stačí ukázat, že posloupnosti $\{|A_n|\}$ a $\{|B_n|\}$ mají stejný rekurentní vzorec a stejné první dva členy.)

[4.2.B25]. Nechť A je daná matice řádu n. Napíšeme-li řádky matice A v opačném pořadí, dostaneme matici B.
Vyjádřete determinant $|B|$ pomocí determinantu $|A|$.

[4.2.B26]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad $\mathbf{K}$ a nechť $B = (\overline{a_{ij}})$, tj. prvky matice B jsou čísla komplexně sdružená k odpovídajícím prvkům matice A.
Dokažte, že pak platí: $|B| = \overline{|A|}$, tj. determinant matice B je číslo komplexně sdružené k determinantu matice A.

[4.2.B27]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad $\mathbf{K}$. Pak:
a) dokažte, že je-li $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ pro $\forall\, i,j$, potom $|A|$ je reálné číslo
b) ukažte, že předchozí implikaci nelze obrátit.

[4.2.B28]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice lichého řádu $2k+1$ nad $\mathbf{R}$ taková, že platí: $a_{ij} + a_{ji} = 0$ pro každé $,i,j$.
Dokažte, že pak je $|A| = 0$.

[4.2.B29]. Nechť A je matice řádu n (nad T); nechť $1 \le k \le n-1$. Dokažte, že platí: jsou-li všechny minory řádu k v matici A nulové, pak jsou všechny minory všech řádů větších než k též nulové.

[4.2.B30]. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \ge 2$ platí:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1).$$

Uvedený determinant se nazývá *Vandermondův determinant* a označuje se $V(x_1, \dots, x_n)$. Můžeme tedy dokazovanou rovnost stručně psát ve tvaru:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

(Návod: při odvozování rekurentního vzorce nejprve od každého sloupce (počínaje posledním) odečtěte x_n-násobek předchozího sloupce, pak rozviňte podle posledního řádku a dále z každého řádku vytkněte číslo $(-1)\cdot(x_n - x_i)$.)

[4.2.B31]. Užitím výsledku předchozího cvičení spočtěte determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, kde $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

(Návod: při d) nejprve danou matici vhodně vyjádřete jako součin dvou matic.)

[4.2.B32]. Dokažte, že pro každé $n \ge 2$ je:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix} = (x_1 + \dots + x_n) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(Návod: nejprve od posledního sloupce odečtěte x_n^2-násobek předchozího sloupce, pak od předposledního sloupce odečtěte x_n-násobek předchozího sloupce a dále postupujte podobně jako ve cvičení [4.2.B30].)

§3: ALGEBRA MATIC

[4.3.A1]. U.p. matic A, B (nad $\mathbf{R}$), které nejsou čtvercové a přitom existují oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

[4.3.A2]. U.p. matice $X \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ tak, aby $X \cdot A = t \cdot A$, kde $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je daná matice a $t \in T$ je dané číslo.

[4.3.A3]. U.p. báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{32}(\mathbf{Q})$.

[4.3.A4]. U.p. generátorů vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou bází tohoto prostoru.

[4.3.A5]. U.p. dvou regulárních matic A, B , které jsou děliteli nuly v okruhu $(\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

[4.3.A6]. U.p. dvou singulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že matice $A \cdot B$ je regulární.

[4.3.A7]. U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{Q})$, k níž neexistuje matice inverzní.

[4.3.A8]. U.p. matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{Q})$, k níž existuje více než jedna inverzní matice.

[4.3.A9]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že $A \cdot B = E_2$ a $B \cdot A \neq E_2$.

[4.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ existovala matice inverzní.

♣ ♣ ♣

[4.3.B1]. Pro dané matice A, B (nad $\mathbf{K}$) spočtěte matici $A \cdot B$:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3-i \\ -i \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1+3i & 1+2i & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = B = \begin{bmatrix} i & 1+i & -1+i \\ 0 & i & -1+i \\ i & 0 & 1+i \end{bmatrix}$

[4.3.B2]. Pro dané matice A, B, C (nad $\mathbf{K}$) spočtěte matici $A \cdot B \cdot C$:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1+2i & 2+i \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$

[4.3.B3]. Spočtěte matici $A \cdot B - B \cdot A$, je-li :

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

[4.3.B4]. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí :

a) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na & \frac{nab}{2}(n-1) + nc \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A^n = \begin{cases} E_2 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ A & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$, kde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

[4.3.B5]. Nalezněte všechny matice X, které jsou zaměnitelné s danou maticí A (tj. platí $A \cdot X = X \cdot A$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

[4.3.B6]. K dané matici $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ nalezněte všechny matice X, resp. Y, resp. Z, splňující vztah :

$X \cdot A = O_{33}$, resp. $A \cdot Y = O_{33}$, resp. $Z \cdot A = A \cdot Z = O_{33}$

(kde O_{33} značí nulovou matici řádu 3). Přitom:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[4.3.B7]. Řešte maticovou rovnici (tj. nalezněte všechny matice X, které splňují danou rovnost) :

a) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$

c) $X \cdot A = B$, kde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A \cdot X \cdot B = C$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

[4.3.B8]. K dané čtvercové matici A nalezněte adjungovanou matici A^*. Přitom :

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3-i & 3+4i & -5+5i \\ 1-i & 2+i & -1+3i \\ 1+5i & -7+4i & -7+9i \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a \end{bmatrix}$

kde matice A v příkladu d) je řádu $n \geq 2$.

[4.3.B9]. K zadané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1} (pomocí adjungované matice). Přitom :

a) $A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i & 1+i \\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a \end{bmatrix}$

kde matice A v příkladu d) je řádu $n \geq 2$.

[4.3.B10]. Dokažte, že

a) pro $A, B \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ platí : $(A+B)' = A' + B'$

b) pro $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$, $t \in T$ platí : $(t \cdot A)' = t \cdot (A')$

c) pro $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$, $B \in \mathrm{Mat}_{np}(T)$, $t \in T$ platí :

$(t \cdot A) \cdot B = A \cdot (t \cdot B) = t \cdot (A \cdot B)$

d) pro $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ regulární a $0 \neq t \in T$ platí: $(t \cdot A)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot (A^{-1})$.

[4.3.B11]. Dokažte, že pro čtvercové matice A, B řádu n platí:

a) $A \cdot B = E_n \iff B \cdot A = E_n$

b) $A \cdot A' = E_n \iff A' \cdot A = E_n$.

[4.3.B12]. Nechť $k \geq 2$ je celé číslo a nechť $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou regulární matice řádu n . Dokažte, že pak platí :

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} .$$

(Návod : důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem ke k .)

[4.3.B13]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$. Dokažte, že platí:

$A \cdot X = X \cdot A$ pro $\forall X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T) \iff \exists\, t \in T$ tak, že $A = t \cdot E_n$.

(Návod: při důkazu " $\Longrightarrow$ " zkoumejte rovnosti $A \cdot U_{rs} = U_{rs} \cdot A$, kde U_{rs} je matice mající na r,s-tém místě jedničku a jinde samé nuly.)

[4.3.B14]. Součet prvků v hlavní diagonále čtvercové matice X se nazývá *stopa matice* X a označuje symbolem $\mathrm{tr}(X)$ (zkratka z anglického "trace" = stopa).

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n (nad T), resp. $B = (b_{ij})$ je matice typu n/m (nad T). Dokažte, že pak platí:

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A) = \mathrm{tr}(A' \cdot B') = \mathrm{tr}(B' \cdot A') .$$

Definice. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ se nazývá
- *symetrická*, jestliže $A' = A$ (tj. je-li $a_{ij} = a_{ji}$ pro $\forall\, i,j$)
- *kososymetrická*, jestliže $A' = -A$ (tj. je-li $a_{ij} = -a_{ji}$ pro $\forall\, i,j$).

[4.3.B15]. Nechť A je libovolná matice typu m/n (nad T). Dokažte, že pak matice $A' \cdot A$ je symetrická a matice $A \cdot A'$ je také symetrická.

[4.3.B16]. Nechť A, B jsou symetrické matice. Dokažte, že pak platí:
a) A je regulární matice $\Longrightarrow$ A^{-1} je symetrická matice
b) $A \cdot B$ je symetrická matice $\Longleftrightarrow$ $A \cdot B = B \cdot A$.

[4.3.B17]. Nechť A, B jsou kososymetrické matice. Dokažte, že pak platí:
a) A je regulární matice $\Longrightarrow$ A^{-1} je kososymetrická matice
b) $A \cdot B$ je kososymetrická matice $\Longleftrightarrow$ $A \cdot B = -B \cdot A$.

[4.3.B18]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{R})$ (tzn. A je reálná matice). Pak:
a) dokažte, že platí: $A \cdot A' = O_{mm} \Longleftrightarrow A = O_{mn}$
b) ukažte, že za předpokladu $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{K})$ (tzn. je-li A komplexní matice) předchozí tvrzení neplatí.

[4.3.B19]. Nechť je dána množina matic

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{K} \text{ libovolné} \right\}$$

(kde $\bar{x}$, resp. $\bar{y}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu x, resp. y) a nechť $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání, resp. násobení matic.
Dokažte, že pak :
a) $(M, +, \cdot)$ je netriviální okruh s jedničkou, který nemá dělitele nuly
b) $(M, +, \cdot)$ není obor integrity.

[4.3.B20]. Dokažte, že daná množina matic M, s operacemi sčítání matic a násobení matic, je tělesem. Přitom:

a) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$.

[4.3.B21]. Nechť a, b jsou pevná reálná čísla. Nechť

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & a(y-x) \\ b(y-x) & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

a $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání matic, resp. násobení matic. Pak:
a) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou
b) ukažte, že existují $a, b \in \mathbf{R}$ tak, že $(M, +, \cdot)$ není obor integrity
c) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $a \cdot b < \frac{1}{4}$.

[4.3.B22]. Nechť a, b jsou pevná reálná čísla. Nechť

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ ay & x+by \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

a $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání matic, resp. násobení matic. Pak:
a) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou
b) ukažte, že existují $a, b \in \mathbf{R}$ tak, že $(M, +, \cdot)$ není obor integrity
c) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $4a + b^2 < 0$.

[4.3.B23]. Na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$ definujeme relaci ϱ takto:
$A \varrho B \Longleftrightarrow \exists$ regulární matice $X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ tak, že $B = X' \cdot A \cdot X$.
Dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$.

[4.3.B24]. Rozhodněte, zda dané matice A, B, C, D tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

[4.3.B25]. Rozhodněte, zda W je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ a pokud je, pak určete jeho dimenzi. Přitom:
a) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j\}$
b) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{i1} = 0 \text{ pro } \forall i\}$
c) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q}\}$
d) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$.

[4.3.B26]. Nechť $W(S)$, resp. $W(K)$ značí množinu všech symetrických matic, resp. všech kososymetrických matic řádu $n \geq 2$ (nad T). Pak:
a) dokažte, že $W(S)$ a $W(K)$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$
b) určete $\dim W(S)$ a $\dim W(K)$
c) dokažte, že $\mathrm{Mat}_{nn}(T) = W(S) \dot{+} W(K)$
d) dokažte, že každou čtvercovou matici lze napsat jako součet symetrické matice a kososymetrické matice, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

[4.3.B27]. Jsou dány tyto podmnožiny množiny $\overline{\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})}$ (tj. množiny všech regulárních matic řádu n nad $\mathbf{R}$) :

$H_1 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q}\}$, $\quad H_2 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q} \wedge |A| = 1\}$

$H_3 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z}\}$, $\quad H_4 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z} \wedge |A| = 1\}$

$H_5 = \{A = (a_{ij}) \mid |A| = 1\}$, $\quad H_6 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} > 0 \text{ pro } \forall\, i, j\}$.

Potom:

a) rozhodněte, zda H_i (pro $i = 1, 2, 3, \ldots, 6$) je podgrupou grupy regulárních matic $(\overline{\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})}, \cdot)$

b) sestrojte hasseovský diagram uspořádané množiny $(\{H_1, \ldots, H_6\}, \subseteq)$

Definice. Reálná čtvercová matice A se nazývá *ortogonální matice*, jestliže je regulární a platí: $A^{-1} = A'$.

[4.3.B28]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) A je ortogonální matice

(ii) $A \cdot A' = E_n$

(iii) $A' \cdot A = E_n$.

[4.3.B29]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Potom:

a) dokažte, že platí: A je ortogonální matice $\implies |A| = \pm 1$

b) ukažte, že opačná implikace obecně neplatí.

[4.3.B30]. Nechť H značí množinu všech ortogonálních matic řádu $n \geq 2$. Pak:

a) dokažte, že $(H, \cdot)$ je grupa (přičemž $\cdot$ značí násobení matic)

b) rozhodněte, zda grupa $(H, \cdot)$ je komutativní.

§4: HODNOST MATICE A DALŠÍ VLASTNOSTI MATIC

[4.4.A1]. U.p. matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a sloupce matice A jsou lineárně závislé.

[4.4.A2]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

[4.4.A3]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{75}(\mathbf{R})$ jsou všechny minory řádu 4 nulové. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

[4.4.A4]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2,4 a 6. Uveďte, co všechno lze pak říci o hodnosti matice A.

[4.4.A5]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ takových, že $h(A \cdot B) \neq h(B \cdot A)$.

[4.4.A6]. U.p. regulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ tak, že $h(A \cdot B) = 2$.

[4.4.A7]. U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

[4.4.A8]. U.p. matice H tak, aby $H \cdot A$ byla matice, která vznikne ze zadané matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ přičtením dvojnásobku 3.řádku k 1.řádku.

[4.4.A9]. U.p. bází (1) a (2) vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, že maticí přechodu od báze (1) k bázi (2) je matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. neexistuje – není regulární

[4.4.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby $h(A \cdot B) \neq h(A)$, kde $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$.

♣ ♣ ♣

[4.4.B1]. Určete hodnost matice A (nad $\mathbf{R}$), je-li:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

[4.4.B2]. Určete hodnost matice A (nad $\mathbf{K}$), je-li:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}$$

[4.4.B3]. Je dána matice A (nad $\mathbf{R}$) tvaru :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Určete $h(A)$, resp. $h(B)$, resp. $h(A \cdot B)$, je-li :

a) $B = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

[4.4.B4]. Určete hodnost dané matice A (v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbf{R}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 2b & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2a & -2 & b \\ 2 & 3b & 3 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{bmatrix}$

[4.4.B5]. Určete hodnost dané matice A (v závislosti na parametrech $u, v \in \mathbf{K}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} i & u & 4+2i \\ 1 & 2i & 1-i \\ -i & 2 & v \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & i & 2-i \\ i & u & -1 & 1+2i \\ -i & 1-2i & 1 & v \end{bmatrix}$

[4.4.B6]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Dokažte, že platí:

a) všechny minory řádu k (kde $k < \min(m, n)$) v matici A jsou nulové $\Longrightarrow$ každý minor řádu $r > k$ v matici A je nulový
b) v matici A existuje nenulový minor řádu $k > 1$ $\Longrightarrow$ pro každé přirozené $s < k$ existuje v matici A nenulový minor řádu s.

[4.4.B7]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je matice taková, že $h(A) = r \geq 2$. Dále, nechť M je čtvercová submatice v A, která je vybrána z r lineárně nezávislých řádků matice A. Pak:

a) ukažte, že může být $|M| = 0$
b) dokažte, že je-li navíc matice M vybrána z r lineárně nezávislých sloupců, pak musí být $|M| \neq 0$.

[4.4.B8]. Nechť $A, B, X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ jsou matice takové, že A, B jsou regulární. Dokažte, že potom:

a) $h(A \cdot X \cdot B) = h(X)$ b) $h(A \cdot X \cdot A^{-1}) = h(X)$.

[4.4.B9]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Dokažte, že platí :

$$h(A+B) \leq h(A) + h(B) .$$

[4.4.B10]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je matice mající hodnost r a nechť M je její submatice typu s/n (tzn. A a M mají stejný počet sloupců). Pak:

a) dokažte, že $h(M) \geq r + s - m$
b) ukažte, že předchozí nerovnost neplatí v případě, když submatice M má méně než n sloupců.

[4.4.B11]. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}, a to jednak pomocí adjungované matice a jednak pomocí elementárních řádkových úprav:

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1+2i & 1-i \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

[4.4.B12]. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 0 & -6 \\ 3 & 10 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

[4.4.B13]. Nalezněte inverzní matici k matici A, řádu $n \geq 2$, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \dots a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a \dots a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ 1 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$

d) $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \ \wedge \ 2 \leq i \leq n \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

[4.4.B14]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom:

inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\iff |A| = \pm 1$.

[4.4.B15]. Nalezněte ty hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které má podprostor W vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ nejmenší dimenzi a určete tuto dimenzi, je-li:

a) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (a, 4, 10, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, -3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 5, 13, 2)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 2, 4, 1)$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 7, a, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, -4, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, a, -14, 1)$.

[4.4.B16]. Zobrazení $f : \mathbf{K} \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ je definováno takto:

$$f(a + b\,i) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \text{pro } \forall\, a + b\,i \in \mathbf{K}.$$

Potom rozhodněte:

a) zda f je injektivní, resp. surjektivní zobrazení

b) zda pro $\forall\, u, v \in \mathbf{K}$ platí:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \ , \qquad \text{resp. } f(u \cdot v) = f(u) \cdot f(v).$$

[4.4.B17]. Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, -3)$
$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 3)$

b) $V = \mathbf{K}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (-2+i\,,\ -i\,,\ 1-2i)$, $\mathbf{u}_2 = (1-i\,,\ i\,,\ -1)$
$\mathbf{v}_1 = (-1+i\,,\ 3+i\,,\ 2i)$, $\mathbf{v}_2 = (i\,,\ 2-i\,,\ 1+i)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 2, 3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 4, -1, 1)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, 5, 4)$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 3, 1, 0)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 0, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, -1)$

e) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 2, 1, 2, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, -2, 8, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 2, -3, 4, -2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 4, -4, 7, -1)$

f) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 2, -5, -9)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -3, -2, 0, 3)$,
$\mathbf{u}_4 = (-1, 1, 2, 3, 2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 4, 2, 4, 3)$,
$\mathbf{v}_4 = (-1, 7, 3, 7, 5)$

g) $V = \mathbf{R}^6$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1, 2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 4, 5, 3, 4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 4, 1, 3, 4)$,
$\mathbf{u}_4 = (4, 0, -1, 5, 0, -1)$, $\mathbf{u}_5 = (4, -2, -4, 6, -2, -4)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 2, -3, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 3, -1, 2, 3)$,
$\mathbf{v}_4 = (-1, 2, 3, -3, 2, 3)$

h) $V = \mathbf{R}^6$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, -1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, -1, 0, 1, 0)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -1, 1, 2, 1, -2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, -2, 0, 0)$
$\mathbf{v}_3 = (3, 0, 2, -1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (4, 1, 3, -4, 0, 2)$.

[4.4.B18]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorového prostoru V (nad T).
Dokažte, že A je regulární matice.

[4.4.B19]. Nechť (1), (2), (3) jsou tři báze vektorového prostoru V nad T. Nechť A je matice přechodu od báze (1) k bázi (2), resp. B je matice přechodu od báze (2) k bázi (3).
Dokažte, že pak $A \cdot B$ je maticí přechodu od báze (1) k bázi (3).

[4.4.B20]. Nalezněte matici přechodu od báze (1) k bázi (2) vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^2$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (2,-3)\,,\ \mathbf{u}_2 = (-1,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (1,0)\,,\ \mathbf{v}_2 = (0,-2)$

b) $V = \mathbf{R}^3$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,2,1)\,,\mathbf{u}_2 = (2,-1,3)\,,\ \mathbf{u}_3 = (-2,3,2)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (-5,9,2)\,,\ \mathbf{v}_2 = (6,-10,5)\,,\ \mathbf{v}_3 = (-1,2,9)$

c) $V = \mathbf{R}^4$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,2,0,0)\,,\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0)\,,\ \mathbf{u}_3 = (1,0,0,-1)\,,$
$\mathbf{u}_4 = (1,1,-1,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (2,2,0,0)\,,\ \mathbf{v}_2 = (3,3,-1,0)\,,\ \mathbf{v}_3 = (2,4,0,1)\,,$
$\mathbf{v}_4 = (2,3,1,-1)$.

[4.4.B21]. Je dána báze (1) vektorového prostoru V a matice A. Nalezněte bázi (2) prostoru V takovou, aby A byla maticí přechodu od báze (1) k bázi (2). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$) (viz cvičení [3.1.B1] b)) ;

$(1): \mathbf{u}_1 = 1+2i,\ \mathbf{u}_2 = 2-3i$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$,

$(1): \mathbf{u}_1 = x^2+3x+2\,,\quad \mathbf{u}_2 = 2x^2+x+1\,,\quad \mathbf{u}_3 = 2x+3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

$$(1): U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4.4.B22]. Je dána báze (2) vektorového prostoru V a matice A. Nalezněte bázi (1) prostoru V takovou, aby A byla maticí přechodu od báze (1) k bázi (2). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$) (viz cvičení [3.1.B1] b)) ;

$$(2): \mathbf{v}_1 = 3-2i\,,\ \mathbf{v}_2 = 1+i\,,\quad \text{resp.}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) $V = \mathbf{K}^3$,

$(2): \mathbf{v}_1 = (1\,,2-i\,,0)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1+i\,,0\,,1)\,,\ \mathbf{v}_3 = (0\,,2i\,,2+i)$

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & 1-2i & -2-i \\ 4+3i & -8-3i & -3+9i \\ -2+i & 3-3i & -3-3i \end{bmatrix}$$

[4.4.B23]. Nalezněte rovnice pro transformaci souřadnic vektoru při přechodu od báze (1) k bázi (2) vektorového prostoru V (tzn. vyjádřete souřadnice vektoru v bázi (1) pomocí souřadnic téhož vektoru v bázi (2)). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}^2$

$(1): \mathbf{u}_1 = (1+i\,,2-i)\,,\ \mathbf{u}_2 = (1-i\,,1+2i)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (7+i\,,-3+4i)\,,\ \mathbf{v}_2 = (2\,,-1+3i)$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$,

$(1): \mathbf{u}_1 = x^2+2x+1\,,\ \mathbf{u}_2 = 2x^2-x+3\,,\ \mathbf{u}_3 = -2x^2+3x+2$

$(2): \mathbf{v}_1 = -5x^2+9x+2\,,\ \mathbf{v}_2 = 6x^2-10x+5\,,\ \mathbf{v}_3 = -x^2+2x+9$

c) $V = \mathbf{K}^3$

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1)\,,\ \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (1+i\,,1+i\,,1+i)\,,\ \mathbf{v}_2 = (2+i\,,3+2i\,,3+2i)\,,$
$\mathbf{v}_3 = (3+i\,,5+2i\,,6+3i)$

d) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

$$(1): U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2): V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

KAPITOLA 5:

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

§1: GAUSSOVA METODA ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.1.B1]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=5\\ 2x_1+3x_2+x_3&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3&=11\\ 5x_1+5x_2+2x_3&=6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 36x_1-23x_2+29x_3-43x_4&=3\\ 45x_1-28x_2+34x_3-52x_4&=9\\ 35x_1-21x_2+28x_3-45x_4&=16\\ 46x_1-32x_2+36x_3-48x_4&=-18 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1-x_2-x_3-2x_4&=-4\\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4&=-3\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4&=-6\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=1\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4&=-4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_3+2x_4+3x_5&=2\\ -x_2-2x_3-3x_4&=2\\ x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ x_1+2x_2+3x_3&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_2+x_3&=0\\ 2x_1+x_2-x_3&=1\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2\\ x_1+2x_2&=-1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-4x_3+6x_4-4x_5&=-4\\ 5x_1+5x_2+8x_4-x_5&=-7\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8\\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1\\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3 \end{aligned}$$

[5.1.B2]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 5x_1-9x_2+5x_3&=1\\ 2x_1+3x_2+3x_3&=2\\ x_1+8x_2&=1\\ x_1-2x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7\\ 2x_1+6x_2+8x_3+3x_4&=3\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=2\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12\\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4&=20 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 10x_1+23x_2+17x_3+44x_4&=25\\ 15x_1+35x_2+26x_3+69x_4&=40\\ 25x_1+57x_2+42x_3+108x_4&=65\\ 30x_1+69x_2+51x_3+133x_4&=95 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_2+4x_3+3x_4&=0\\ x_2+3x_3+5x_4+3x_5&=0\\ x_2+x_3+x_4&=0\\ x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ x_2+2x_3+3x_4&=1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5&=2\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5&=2\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5&=1\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5&=1 \end{aligned}$$

[5.1.B3]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ x_1-2x_2+x_3&=0\\ 5x_1-9x_2+5x_3&=1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=1\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_2+x_4&=1\\ 3x_1-2x_2-3x_3+4x_4&=-2\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2\\ x_1-x_3&=1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=1\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_2+2x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5&=3\\ -x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5&=0\\ -2x_1+3x_2+3x_3-6x_5&=2 \end{aligned}$$

[5.1.B4]. Nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic, zadané rozšířenou maticí soustavy (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 3&3&2&1&10\\ 4&2&3&1&8\\ 3&5&1&1&15\\ 7&4&5&2&18 \end{array}\right]$$

b) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0&2&3&1&0&0\\ 3&4&5&5&6&9\\ 1&5&4&3&2&3\\ 2&1&2&3&4&6 \end{array}\right]$$

c) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&2\\ 7&0&0&0&4&3\\ 5&0&0&0&3&4 \end{array}\right]$$

d) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1\\ 7&0&0&0&4&1\\ 5&0&0&0&3&1 \end{array}\right]$$

e) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0&\sqrt{2}&\sqrt{3}&\sqrt{6}&0&3\\ 2&2&\sqrt{3}&-2&-\sqrt{5}&-2\\ 0&2&\sqrt{5}&2\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\ 3&3&\sqrt{3}&-3&0&3 \end{array}\right]$$

f) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&0&\sqrt{3}&-\sqrt{6}&3&\sqrt{3}\\ \sqrt{2}&0&\sqrt{2}&-2&\sqrt{6}&\sqrt{2}\\ 3&0&-\sqrt{6}&2\sqrt{3}&-3\sqrt{2}&-\sqrt{6}\\ \sqrt{3}&0&1&-\sqrt{2}&\sqrt{3}&1 \end{array}\right]$$

[5.1.B5]. Gaussovou metodou řešte zadanou soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{K}$):

a)
$$\begin{aligned}(1-2i)\,x_1 + (2+3i)\,x_2 &= 8+5i\\ (1-4i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 &= 5-2i\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(3-i)\,x_1 + (-5+i)\,x_2 &= 1+i\\ (1-2i)\,x_1 + (-2+3i)\,x_2 &= 1\\ (5-5i)\,x_1 + (-9+7i)\,x_2 &= 3+i\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}2\,x_1 + (2+2i)\,x_2 + 2i\,x_3 &= 1\\ (1-i)\,x_1 + (1+3i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 &= 0\\ (1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 1\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}(1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 1\\ x_1 + (1+i)\,x_2 + i\,x_3 &= 1\\ (1-i)\,x_1 + (1+3i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (-1-i)\,x_2 + x_3 &= 1-i\end{aligned}$$

[5.1.B6]. Řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$), v závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$:

a)
$$\begin{aligned}4x_1-2x_2+3x_3+7x_4 &= 1\\ 5x_1-3x_2+3x_3+4x_4 &= 3\\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4 &= 9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4 &= a\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}a x_1-4x_2+9x_3+10x_4 &= 11\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4 &= 5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4 &= 7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4 &= 9\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}a x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+a x_2+x_3 &= a\\ x_1+x_2+a x_3 &= a^2\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}a x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+a x_2+x_3 &= 1\\ x_1+x_2+a x_3 &= 1\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}(1+a)x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+(1+a)x_2+x_3 &= a\\ x_1+x_2+(1+a)x_3 &= a^2\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(a+1)x_1+x_2+x_3 &= a^2+3a\\ x_1+(a+1)x_2+x_3 &= a^3+3a^2\\ x_1+x_2+(a+1)x_3 &= a^4+3a^3\end{aligned}$$

§2: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.2.A1]. U.p. dvou ekvivalentních soustav lineárních rovnic (nad $\mathbf{Q}$), které sestávají z různého počtu rovnic.

[5.2.A2]. U.p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě jedno řešení.

[5.2.A3]. U.p. soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě jedno řešení.

[5.2.A4]. U.p. soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě 2 řešení.

[5.2.A5]. U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{Q}$) tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny za volné neznámé.

[5.2.A6]. U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{Q}$) tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

[5.2.A7]. Je dána soustava 3 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž matice soustavy je singulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

[5.2.A8]. Je dána soustava 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

[5.2.A9]. U.p. nehomogenní soustavy lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{R}$) tak, že množina všech řešení této soustavy je podprostorem ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

[5.2.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad T) byla neřešitelná.

♣ ♣ ♣

[5.2.B1]. Rozhodněte, zda daná soustava lineárních rovnic je řešitelná, či nikoliv. U řešitelné soustavy udejte, kolik má řešení (bez hledání těchto řešení):

a)
$$\begin{aligned} 3x_1+10x_2+2x_3-x_4&=-2\\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4&=1\\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4&=5\\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4&=2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4&=10\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4&=15\\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4&=8\\ 4x_1+4x_2+2x_3+x_4&=13\\ 4x_1+x_2+3x_3+x_4&=8 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3\\ 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4&=7\\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4&=1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3&=10\\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4&=11\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12\\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4&=20 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} (1+i)\,x_1+(2-i)\,x_2&=3+5i\\ (3+4i)\,x_1+x_2+(2-5i)\,x_3&=7-2i\\ (2+i)\,x_1+(1-i)\,x_2+(3-4i)\,x_3&=1+6i \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} (2+3i)\,x_1+(1-i)\,x_2+2\,x_3&=1+i\\ (1+2i)\,x_1+2i\,x_3&=3+i\\ (-1+i)\,x_1+(1+i)\,x_2+(2+2i)\,x_3&=-2i \end{aligned}$$

[5.2.B2]. V závislosti na parametrech rozhodněte o řešitelnosti, resp. o počtu řešení (bez hledání těchto řešení) soustavy lineárních rovnic, která je zadaná rozšířenou maticí soustavy (nad $\mathbf{R}$):

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} a&1&1&1&1\\ 1&a&1&1&1\\ 1&1&a&1&1\\ 1&1&1&a&1 \end{array}\right]$
b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 4&1&4&a&2\\ 2&3&6&8&5\\ 3&2&5&4&3\\ 6&-1&2&-8&-3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&a\\ 0&1&1&0&b\\ 0&0&1&1&c\\ 1&0&0&1&d \end{array}\right]$
d) $\left[\begin{array}{ccc|c} d&1&1&a\\ 1&d&1&b\\ 1&1&d&c \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&a&1&3\\ b&1&1&2c\\ 1&1&1&1 \end{array}\right]$
f) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\ a&b&c&1\\ a^2&b^2&c^2&0 \end{array}\right]$ kde $a,b\geq 0$.

[5.2.B3]. Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathbf{R}$, pro které je daná soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) řešitelná:

a)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ 3x_1-7x_2+3x_3+6x_4&=7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ -2x_1+2x_2-4x_3+2x_4&=7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ -x_1-7x_2+3x_3+6x_4&=7 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+(1+a)x_3&=a^2\\ x_1+(1+a)x_2+x_3&=a\\ (1+a)x_1+x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$

[5.2.B4]. Nechť a,b,c,d jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Dokažte, že pak následující soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) má jediné řešení:

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4&=1\\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4&=9\\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4&=8\\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4&=9 \end{aligned}$$

(Návod: počítejte determinant matice soustavy a užijte Cramerovo pravidlo.)

[5.2.B5]. Nechť $0\neq t\in T$ a nechť jsou dány soustavy lineárních rovnic:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ \vdots\qquad\qquad&\ \ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=b_k \end{aligned} \qquad\qquad (2)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=t\cdot b_1\\ \vdots\qquad\qquad&\ \ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=t\cdot b_k \end{aligned}$$

Pak:

a) dokažte, že soustava (1) je řešitelná $\iff$ soustava (2) je řešitelná

b) ukažte, že předchozí tvrzení neplatí, vynecháme-li předpoklad $t\neq 0$.

[5.2.B6]. Dokažte, že soustava lineárních rovnic (zapsaná maticově) $A\cdot X=B$ je řešitelná $\iff$ sloupcový vektor B je lineární kombinací sloupců matice A.

[5.2.B7]. Nechť A je matice typu k/n nad T. Dokažte, že množina všech vektorů $\mathbf{u}\in T^k$, pro které je soustava lineárních rovnic $A\cdot X=\mathbf{u}'$ řešitelná, tvoří podprostor v T^k, jehož dimenze je rovna $h(A)$.

(Návod: při důkazu využijte předchozí cvičení.)

[5.2.B8]. Je dána soustava lineárních rovnic $A\cdot X=B$, kde

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sloupcových vektorů B takových, že

a) soustava $A\cdot X=B$ je řešitelná

b) soustava $A\cdot X=B$ není řešitelná

[5.2.B9]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze vektorového prostoru V nad T. Uvažme vektory:

$$a_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \ , \ a_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \ , \ \dots \ , \ a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_n \ , \ a_n\mathbf{u}_n$$

kde $a_i \in T$. Nalezněte všechny hodnoty $a_1, \dots, a_n$, pro které jsou uvedené vektory lineárně nezávislé.

(Návod: použijte úvah o řešitelnosti a počtu řešení soustavy lineárních rovnic.)

[5.2.B10]. Danou soustavu lineárních rovnic řešte pomocí Cramerova pravidla (pokud je to možné):

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - i\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 2+i \\ i\,x_1 - x_2 &= 0 \\ (1-i)\,x_1 + i\,x_3 &= 1+3i \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 13x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 8 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 7x_1 - 6x_2 + 18x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

[5.2.B11]. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu n lineárních rovnic o n neznámých (nad T):

$$\begin{aligned} bx_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + ax_n &= 2 \\ ax_1 + bx_2 + \ldots + ax_{n-1} + ax_n &= 2 \\ \vdots \qquad\qquad & \ \vdots \\ ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + bx_n &= 2 \end{aligned} \ , \qquad \text{kde } b \neq a \ \wedge \ b \neq (1-n)\cdot a\,.$$

[5.2.B12]. Je dána soustava lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= c \\ c\,x_1 + b\,x_3 &= a \\ c\,x_2 + a\,x_3 &= b \end{aligned}$$

přičemž platí, že tato soustava má jediné řešení. Potom:

a) dokažte, že $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

b) pomocí Cramerova pravidla najděte toto řešení.

[5.2.B13]. Je dána řešitelná soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$). Pomocí obecného Cramerova pravidla nalezněte všechna její řešení:

a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

§3:HOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.3.A1]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{R}$) tak, že za volné neznámé je nutno volit právě neznámé x_1, x_3.

[5.3.A2]. U.p. podprostoru W v $\mathbf{R}^5$, který není množinou řešení žádné homogenní soustavy lineárních rovnic o 5 neznámých nad $\mathbf{R}$.

[5.3.A3]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 4.

[5.3.A4]. U.p. homogenní soustavy 2 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 2.

[5.3.A5]. Nechť W je podprostor řešení homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 6 neznámých (nad $\mathbf{R}$). Udejte, jakých všech hodnot může nabývat $\dim W$.

[5.3.A6]. U.p. homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byly vektory $(1,1,0,0,0)$ a $(0,0,0,0,1)$.

[5.3.A7]. U.p. homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byl vektor $(1,1,1,1)$.

[5.3.A8]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

[5.3.A9]. U.p. homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

[5.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby homogenní soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad $\mathbf{R}$) měla nekonečně mnoho řešení.

♣ ♣ ♣

[5.3.B1]. Řešte zadanou homogenní soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$, resp. nad $\mathbf{K}$):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+5x_3&=0\\ 2x_1-x_2+3x_3&=0\\ 3x_1-5x_2+4x_3&=0\\ 3x_1+16x_2+7x_3&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2-4x_3-4x_4+4x_5&=0\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=0\\ 3x_1+8x_2-6x_3-6x_4+6x_5&=0\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=0\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=0\\ 5x_1-x_2+x_3-x_4&=0\\ 6x_1+x_2-2x_3+3x_4&=0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x_1-x_2+x_4-2x_5&=0\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0\\ 2x_1-4x_2+2x_3-2x_4+2x_5&=0\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} (1+i)\,x_1+(3-i)\,x_2+(1+2i)\,x_3&=0\\ (2+3i)\,x_1+(2+i)\,x_2+(1-i)\,x_3&=0\\ (1+2i)\,x_1+(-1+2i)\,x_2+(1-3i)\,x_3&=0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} (1-i)\,x_1+(1+i)\,x_2+(1+i)\,x_3&=0\\ (1+3i)\,x_1+(1-i)\,x_2+(-1+i)\,x_3&=0\\ (1+i)\,x_1+x_2+i\,x_3&=0 \end{aligned}$$

[5.3.B2]. V závislosti na parametrech řešte homogenní soustavu lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$:

a) $$\begin{aligned} a\,x_1+4\,x_2+2\,x_3&=0\\ 2\,x_1+3\,x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} a\,x_1-2\,x_2+x_3&=0\\ 3\,x_1-2\,x_2-x_3&=0\\ a^2x_1+x_2+(a-1)\,x_3&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d\,x_4&=0\\ b\,x_1-a\,x_2+d\,x_3-c\,x_4&=0\\ c\,x_1-d\,x_2-a\,x_3+b\,x_4&=0\\ d\,x_1+c\,x_2-b\,x_3-a\,x_4&=0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} a\,x_1-4\,x_2-x_3&=0\\ 4\,x_1-6\,x_2-3\,x_3&=0\\ x_1+x_2-a\,x_3&=0 \end{aligned}$$

(Návod: při řešení c) spočtěte nejprve determinant matice soustavy.)

[5.3.B3]. Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathbf{R}$, pro které má daná homogenní soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) nenulové řešení:

a) $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+x_4&=0\\ 2\,x_1+x_2-x_3+2\,x_4&=0\\ x_2+x_3+4\,x_4&=0\\ x_1+x_4&=0\\ x_1-x_2-3\,x_3+a\,x_4&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} a\,x_1-x_2+x_4&=0\\ x_1+x_2+3\,x_3+2\,x_4&=0\\ 2\,x_1+x_2+3\,x_3+2\,x_4&=0\\ (a+1)\,x_1+4\,x_3+3\,x_4&=0\\ (a+2)\,x_1+3\,x_3+3\,x_4&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} a\,x_1+3\,x_2+a\,x_3&=0\\ (a-1)\,x_1+3\,x_2+2a\,x_3&=0\\ (2a+1)\,x_1+6\,x_2+a\,x_3&=0\\ -x_1+x_2+(a+2)\,x_3&=0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3\,x_1+5\,x_2-(a+2)\,x_3+(2a-2)\,x_4&=0\\ 2\,x_1+3\,x_2-(a+1)\,x_3+(a-1)\,x_4&=0\\ 3\,x_1+4\,x_2-(2a+1)\,x_3+(a-1)\,x_4&=0\\ (a+1)\,x_1+a\,x_2+2\,x_3+x_4&=0\\ (a+1)\,x_1+(a+1)\,x_2+(a+1)\,x_3+a\,x_4&=0 \end{aligned}$$

[5.3.B4]. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých taková, že matice soustavy má hodnost $(n-1)$.
Dokažte, že potom pro libovolná dvě nenulová řešení $(r_1,\dots,r_n)$, $(s_1,\dots,s_n)$ této soustavy existuje $t\in T$ tak, že:

$$r_i=t\cdot s_i\,,\qquad \text{pro každé } i=1,\dots,n\,.$$

[5.3.B5]. Nechť $A\cdot X=B$ a $C\cdot X=D$ jsou dvě ekvivalentní řešitelné soustavy lineárních rovnic o n neznámých (nad T). Pak:

a) dokažte, že zhomogenizované soustavy k těmto soustavám jsou také ekvivalentní

b) ukažte, že bez předpokladu řešitelnosti soustav $A\cdot X=B$ a $C\cdot X=D$ předchozí tvrzení obecně neplatí.

[5.3.B6]. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru řešení W zadané homogenní soustavy lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+4x_4&=0\\ 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4&=0\\ 3x_1+4x_2+6x_3+7x_4&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3+6x_4&=0\\ 5x_1+6x_2-3x_3+9x_4&=0\\ 3x_1+14x_2-x_3+3x_4&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+5x_3+x_4&=0\\ 2x_1+x_2+5x_3+x_4&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4&=0\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5x_1+3x_2+9x_3+5x_4+2x_5&=0\\ 4x_1+4x_2+8x_3+5x_4+4x_5&=0\\ 2x_1+7x_2+4x_3+5x_4+8x_5&=0\\ 3x_1+5x_2+7x_3+5x_4+6x_5&=0\\ 3x_1-2x_2+x_3-6x_5&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=0\\ 4x_1+7x_2+x_3&=0\\ 5x_1+7x_2-4x_3+7x_4&=0\\ 3x_1+4x_2-3x_3+5x_4&=0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 3x_1+3x_2-x_3+14x_4&=0\\ 2x_1+3x_2-x_3+6x_4+3x_5&=0\\ 3x_1+6x_2-2x_3+4x_4+9x_5&=0\\ 5x_1+6x_2-2x_3+20x_4+3x_5&=0\\ 4x_1+9x_2-3x_3+2x_4+15x_5&=0 \end{aligned}$$

[5.3.B7]. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic o 3 neznámých, nad $\mathbf{K}$. Nalezněte bázi a dimenzi jejího podprostoru řešení W (ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}^3$):

a) $$\begin{aligned}(1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (2-i)\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (3+2i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(2+3i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\\ (1-8i)\,x_1 + 5i\,x_2 + (3-i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(1+2i)\,x_1 + (-2+3i)\,x_2 + 3i\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (1+2i)\,x_3 &= 0\\ (2-3i)\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (1+2i)\,x_3 &= 0\\ (3+3i)\,x_1 + (-1+4i)\,x_2 + (1+5i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}(1-i)\,x_1 + i\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\\ (-1+i)\,x_1 + (2+i)\,x_2 + (3+i)\,x_3 &= 0\\ (1-i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 + (3-i)\,x_3 &= 0\\ (-2+2i)\,x_1 + (3+i)\,x_2 + (4+2i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

[5.3.B8]. Nalezněte homogenní soustavu lineárních rovnic, jejíž množina řešení je rovna podprostoru W vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W = [(1,2,-1),(2,1,1)]$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $W = [(1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1)]$

c) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(1,1,5,5,2),(2,2,0,0,-1),(1,1,-1,-1,-1),(1,1,1,1,0)]$

d) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(3,2,5,2,7),(6,4,7,4,5),(3,2,-1,2,-11),(6,4,1,4,13)]$

e) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(2,1,1,2,1),(3,1,2,3,1),(4,-1,5,7,3),(5,-2,5,6,0)]$

f) $V = \mathbf{R}^4$; $W = \{(2a-b-c,\ 3a-b+2c,\ a-2b+3c,\ c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$

g) $V = \mathbf{R}^5$; $W = \{(t,\ 2t,\ 0,\ -t,\ 4t) \mid t \in \mathbf{R}\}$

h) $V = \mathbf{R}^5$; $W =$
$\{(5a-2b+3c,\ 6a-4b+4c,\ a+3b-3c,\ 2a+b+2c,\ 3a+b+c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$.

[5.3.B9]. Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž množinou řešení je zadaná množina vektorů z vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $M = \{(0,0,0),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$

b) $V = \mathbf{R}^3$, $M = \{(x,0,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

c) $V = \mathbf{R}^4$, $M = \{(a+b+1,\ a+b,\ 0,\ 0) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$

d) $V = \mathbf{R}^4$, $M = \mathbf{R}^4 - \{(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1)\}$.

[5.3.B10]. Nalezněte homogenní soustavu 2 lineárně nezávislých lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) takovou, že jejími řešeními jsou (kromě jiných) vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$, kde:

a) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (2,-3,1,0)$, $\mathbf{w} = (3,-5,-1,1)$

b) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (2,-3,1,0)$, $\mathbf{w} = (3,-5,-1,2)$

c) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (-1,2,2,-2)$, $\mathbf{w} = (\sqrt{2},-\sqrt{8},-\sqrt{8},\sqrt{8})$

[5.3.B11]. Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{u}$ je řešením zadané soustavy lineárních rovnic a pokud ano, pak pomocí vektoru $\mathbf{u}$ vyjádřete všechna řešení $\mathbf{x}$ této soustavy:

a) $\mathbf{u} = (1,-1,1,1)$; $$\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 1\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 &= 1\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4 &= 1\\ 3x_1+5x_2+4x_3 &= 2\end{aligned}$$

b) $\mathbf{u} = (-8,3,6,0)$; $$\begin{aligned}x_1-2x_2+3x_3+4x_4 &= 4\\ x_2-x_3+x_4 &= -3\\ x_1+3x_2-3x_4 &= 1\\ -7x_2+3x_3+x_4 &= 3\end{aligned}$$

c) $\mathbf{u} = (-16,23,0,0,0)$; $$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 7\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &= -2\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &= 23\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &= 12\end{aligned}$$

d) $\mathbf{u} = (0,2,-2,0,3)$; $$\begin{aligned}x_1-x_2-x_3-x_4-x_5 &= -3\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5 &= 10\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5 &= 11\\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5 &= 6\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5 &= 3\end{aligned}$$

KAPITOLA 6:

EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: SKALÁRNÍ SOUČIN, VELIKOST A ODCHYLKA VEKTORŮ

Úmluva. Všude v této kapitole, ve všech příkladech o euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ se předpokládá (není-li výslovně řečeno jinak), že skalární součin je v prostoru $\mathbf{R}^n$ definován "obvyklým způsobem", tzn. pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n .$$

[6.1.A1]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b)) definujte skalární součin.

[6.1.A2]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_3[x]$ definujte skalární součin dvěma různými způsoby.

[6.1.A3]. U.p. reálného vektorového prostoru, ve kterém nelze definovat skalární součin.

[6.1.A4]. U.p. nenulového vektoru $\mathbf{u}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$.

[6.1.A5]. U.p. normovaných vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{3}$.

[6.1.A6]. U.p. normovaných, lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$.

[6.1.A7]. Nechť skalární součin dvou normovaných vektorů v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ je roven -1. Uveďte, co lze říci o lineární závislosti či nezávislosti těchto vektorů.

[6.1.A8]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou normované vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$. Uveďte, co všechno lze říci o velikosti vektoru $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

[6.1.A9]. U.p. vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, že odchylka těchto vektorů je $\frac{2}{3}\pi$.

[6.1.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ platilo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.

♣ ♣ ♣

[6.1.B1]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ je pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ definováno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}^2$ definován skalární součin. Přitom:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 5u_2v_2$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_2 + u_2v_1$ d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$

[6.1.B2]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definováno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}^3$ definován skalární součin. Přitom:
a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$
b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + 2u_3v_3$
d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_3 - u_3v_2$.

[6.1.B3]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ je pro libovolné dva vektory (tj. polynomy) $\mathbf{f} = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\mathbf{g} = b_2x^2 + b_1x + b_0$ definováno reálné číslo $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}_2[x]$ definován skalární součin. Přitom:

a) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 1$ b) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$
c) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$ d) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = | a_2 \cdot b_2 |$.

[6.1.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ je pro libovolné vektory (tj. matice) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ definováno reálné číslo $A \cdot B$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ definován skalární součin. Přitom:

a) $A \cdot B = \det(A \cdot B)$ b) $A \cdot B = \det(A + B)$
c) $A \cdot B = a_1b_1 + a_4b_4$. d) $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$

[6.1.B5]. Nechť V je euklidovský vektorový prostor (se skalárním součinem $\cdot$). Rozhodněte, zda $*$ je též skalárním součinem ve V, jestliže pro $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ položíme:
a) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ b) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
c) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = t \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, kde t je pevné reálné číslo.

[6.1.B6]. Nechť v reálném vektorovém prostoru V jsou definovány dva skalární součiny $\circ$ a $*$.
Dokažte, že jestliže pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ platí : $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} * \mathbf{u}$, pak jsou oba skalární součiny $\circ$ a $*$ shodné.
(Návod: počítejte $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \circ (\mathbf{u}+\mathbf{v})$ a $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) * (\mathbf{u}+\mathbf{v})$.)

[6.1.B7]. V euklidovském prostoru V spočtěte velikost zadaného vektoru $\mathbf{u}$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^5$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, 7, \sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b) $V = \mathbf{R}^7$, $\mathbf{u} = (-9, -4, 0, \sqrt{15}, 0, 7, 8)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,
$\mathbf{u} = 5x^2 + 6x - 3$

d) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,
$\mathbf{u} = 5x^2 + 6x - 3$.

[6.1.B8]. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které je zadaný vektor $\mathbf{u}$ z euklidovského prostoru V normovaný. Přitom:

a) $V = \mathbf{R}^5$; $\mathbf{u} = (a+1, 0, a+2, 0, a+1)$

b) $V = \mathbf{R}^7$; $\mathbf{u} = (a+1, 1, 0, a+2, 1, 0, 2a-3)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,
$\mathbf{u} = 3x^2 + a$

d) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,
$\mathbf{u} = 3x^2 + a$.

[6.1.B9]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou vektory z euklidovského prostoru V. Dokažte, že platí:

a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$

b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

c) jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nenulové vektory a φ je jejich odchylka, pak:
$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\varphi$

d) $|\,\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\,| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

(Návod: při d) počítejte $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ a použijte Schwarzovu nerovnost.)

[6.1.B10]. Nechť V je euklidovský prostor a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou vektory z V takové, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
Bez užití Schwarzovy nerovnosti dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

[6.1.B11]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Dokažte, že platí:
$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \iff \exists\, r \geq 0$ tak, že $\mathbf{u} = r \cdot \mathbf{v}$ nebo $\mathbf{v} = r \cdot \mathbf{u}$.

[6.1.B12]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ jsou takové vektory, že $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé. Pak:

a) dokažte, že platí: $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}$

b) ukažte, že předchozí rovnost obecně neplatí, nahradíme-li předpoklad, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé předpokladem, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé.

[6.1.B13]. V euklidovském prostoru V jsou zadány dvě posloupnosti k vektorů : $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, resp. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ takové, že pro $\forall\, i, j$ platí :

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{je-li } i \neq j \quad \wedge \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0 .$$

Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou též lineárně nezávislé.

[6.1.B14]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$, resp. $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$. Dokažte, že platí : $t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \iff$

$$\begin{aligned}
t_1\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + t_2\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k) &= 0 \\
t_1\,(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + t_2\,(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k\,(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k) &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots \\
t_1\,(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1) + t_2\,(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k\,(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k) &= 0
\end{aligned}$$

(Návod: při důkazu "$\Longleftarrow$" nejprve pro každé $i = 1, \ldots, k$ v i-té rovnici "vytkněte" vektor $\mathbf{u}_i$, vynásobte číslem t_i a nakonec všechny takto vzniklé rovnice sečtěte .)

[6.1.B15]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Determinant

$$\begin{vmatrix}
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\
\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k \\
\vdots & & & \vdots \\
\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k
\end{vmatrix}$$

se nazývá *Gramův determinant vektorů* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ a označuje se symbolem $G(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
Dokažte, že platí :
vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff G(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = 0$.

(Návod: použijte definici lineární závislosti a výsledek cvičení [6.1.B14].)

[6.1.B16]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V.
Rozhodněte, jak se změní Gramův determinant $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, jestliže v posloupnosti $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$

a) zaměníme vektory $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{u}_j$ $(i \neq j)$

b) vektor $\mathbf{u}_i$ vynásobíme číslem $t \in \mathbf{R}$

c) k vektoru $\mathbf{u}_i$ přičteme vektor $\mathbf{u}_j$ $(i \neq j)$

d) k vektoru $\mathbf{u}_i$ přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů.

(Návod: při c) počítejte $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k)$ tak, že nejprve rozepíšete i-tý řádek a po zjednodušení pak totéž provedete pro i-tý sloupec; při d) postupujte obdobným způsobem.)

[6.1.B17]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé vektory a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé vektory z euklidovského prostoru V takové, že:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, \dots, r, \ \ j = 1, \dots, s.$$

Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé.

(Návod: při důkazu využijte výsledek cvičení [6.1.B15] a Cramerovo pravidlo.)

[6.1.B18]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V a nechť $b_1, \dots, b_n$ jsou pevně zvolená nenulová reálná čísla. Dokažte, že potom existuje právě jedna báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ euklidovského prostoru V, splňující podmínky:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} b_j & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases} \qquad \text{pro každé } i, j = 1, \dots, n.$$

(Návod: žádané vektory hledejte ve tvaru: $\mathbf{e}_j = x_{j1}\mathbf{u}_1 + \dots + x_{jn}\mathbf{u}_n$ a požadujte splnění podmínek zadání. Použijte Cramerovo pravidlo a výsledek cvičení [6.1.B15].)

§2: ORTOGONÁLNOST

[6.2.A1]. U.p. báze euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$, která je ortogonální a není ortonormální.

[6.2.A2]. U.p. dvou různých ortonormálních bází euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$.

[6.2.A3]. U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbf{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbf{R}^3$.

[6.2.A4]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ jsou nenulové ortogonální vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$. Uveďte, co všechno lze pak říci o čísle n.

[6.2.A5]. Nechť $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ jsou vektory získané z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Uveďte, kolik z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ je nulových.

[6.2.A6]. U.p. ortogonálních množin A, B v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že A je konečná množina a B je nekonečná množina.

[6.2.A7]. U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

[6.2.A8]. U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

[6.2.A9]. U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$ do podprostoru W byl nulový vektor.

[6.2.A10]. U podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby podmnožiny A, B euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ byly ortogonální.

♣ ♣ ♣

[6.2.B1]. Rozhodněte, zda dané vektory euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální:

a) $(1,-2,2,1)$, $(1,3,2,1)$, $(-1,0,1,-1)$

b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $(2,3,-3,-4)$, $(-1,3,-3,4)$, $(3,1,3,0)$

d) $(1,3,1,2)$, $(0,0,0,0)$, $(1,-3,2,3)$.

[6.2.B2]. Určete parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby dané vektory euklidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ byly ortogonální:

a) $(1,1,2,0,0)$, $(1,-1,0,1,a)$, $(1,b,2,3,-2)$

b) $(2,-1,0,a,b)$, $(a,b,0,-2,1)$, $(a,2b,5,b,-a)$

c) $(1,-2,a,3,0)$, $(-1,1,0,a,7)$, $(1,-2,b,3,0)$, $(0,b,-1,1,8)$

d) $(1,2,0,2,1)$, $(0,0,0,0,0)$, $(-5,2,5,-2,5)$, $(a,b,0,b,a)$.

[6.2.B3]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ nalezněte všechny normované vektory, které jsou ortogonální k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, je-li:

$$\mathbf{u} = (1,1,1,1), \quad \mathbf{v} = (1,-1,-1,1), \quad \mathbf{w} = (2,1,1,3).$$

[6.2.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ je skalární součin definován:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\,dt\ .$$

Rozhodněte, zda pak zadané vektory (tj. polynomy) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ tvoří bázi, resp. ortogonální bázi, resp. ortonormální bázi tohoto euklidovského prostoru, je-li:

a) $\mathbf{f}_1 = 2x\ ,\quad \mathbf{f}_2 = 3x^2 - 1\ ,\quad \mathbf{f}_3 = 3$

b) $\mathbf{f}_1 = x^2 - 2x + 1\ ,\quad \mathbf{f}_2 = 5x^2 + 2x - 1\ ,\quad \mathbf{f}_3 = 2x + 1$

c) $\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad \mathbf{f}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\ ,\quad \mathbf{f}_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$

d) $\mathbf{f}_1 = 5x^2 + 2x - 1\ ,\quad \mathbf{f}_2 = x^2 - 2x + 1\ ,\quad \mathbf{f}_3 = x^2 + 4x - 2.$

[6.2.B5]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Dokažte, že pak platí:

a) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \iff \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|.$

[6.2.B6]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je ortogonální báze euklidovského prostoru V a nechť $t_1, \dots, t_n$ jsou libovolná nenulová reálná čísla.
Dokažte, že pak $t_1\cdot\mathbf{u}_1, \dots, t_n\cdot\mathbf{u}_n$ je také ortogonální báze prostoru V.

[6.2.B7]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^4$; $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,2,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-5,3)$, $\mathbf{u}_3 = (3,2,8,-7)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,-7)$, $\mathbf{u}_3 = (3,-2,3,14)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-1,-1,1)$,
$\mathbf{u}_4 = (-1,1,1,1)$

d) $V = \mathbf{R}^5$; $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,-2,-1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,0,-2,3)$,
$\mathbf{u}_3 = (1,1,-2,-1,-1)$, $\mathbf{u}_4 = (1,-6,-4,1,-2)$

e) $V = \mathbf{R}^5$; $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,2,0,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,3,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,-3,2,3)$,
$\mathbf{u}_4 = (1,-1,9,-2,-1)$

f) $V = \mathbf{R}^5$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1,-1,0,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,-1,1,0,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-2,-2,0,0)$,
$\mathbf{u}_4 = (1,-4,1,3,4)$

g) $V = \mathbf{R}^4$; W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 9x_4 &= 0\\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

h) $V = \mathbf{R}^5$; W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \qquad\quad - 2x_5 &= 0\\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 &= 0\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0\\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B8]. V reálném vektorovém prostoru V je definován skalární součin. V takto získaném euklidovském prostoru nalezněte nějakou ortogonální bázi. Přitom:

a) $V = \mathbf{R}^2$; pro $\forall\ \mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ definujeme
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2$

b) $V = \mathbf{R}^3$; pro $\forall\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definujeme
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_3 - u_3v_2$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, pro $\forall\ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{R}_2[x]$ definujeme $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$

d) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$; pro $\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ definujeme
$A\cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$

[6.2.B9]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Ukažte, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$. Přitom :

a) $\mathbf{u}_1 = (1,-2,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,3,2,1)$

b) $\mathbf{u}_1 = (2,3,-3,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,3,-3,4)$

c) $\mathbf{u}_1 = (1,7,7,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,7,-7,1)$

d) $\mathbf{u}_1 = (1,-3,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (1,3,1,2)$

[6.2.B10]. Sestrojte ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$, jsou-li dány její vektory:

a) $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

b) $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$

c) $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

[6.2.B11]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je definován skalární součin takto: pro libovolné vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ je:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 ,$$

V tomto euklidovském prostoru pak nalezněte ortogonální bázi podprostoru

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \},$$

která

a) obsahuje vektor (1,1,0)
b) obsahuje nějaký vektor z podprostoru U, kde U je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B12]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V; nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, přičemž:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n , \qquad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n .$$

Dokažte, že pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
(ii) báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je ortonormální.

[6.2.B13]. Nechť $W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\mathbf{x} \in W^\perp \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1 \ \wedge \ldots \wedge \ \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_n .$$

(jinak řečeno: vektor leží v ortogonálním doplňku podprostoru W právě když je ortogonální k libovolným generátorům tohoto podprostoru W.)

[6.2.B14]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ nechť je dán podprostor W jako množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Dokažte, že potom $W^\perp = [(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})]$.

[6.2.B15]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ je dán podprostor W. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(2r + t, -3r + s - t, 4r + 3t, 8r + 5t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (3, -5, 4, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 2, -3)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 0, 7)$

c) $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1 = (3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 1)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 3, -1, 1)$

d) W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 - 9x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B16]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^5$ je dán podprostor W. Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 2, 1, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -1, -1, 2)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, -7, 12, 7, -19)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 5, -8, -5, 13)$

c) $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, -1, 0)$,
$\mathbf{u}_2 = (1, -1, -1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (-1, 0, -1, 1, 1)$

d) W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B17]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je definován skalární součin takto: pro libovolné vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 6u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_2v_3 + u_3v_2.$$

V tomto euklidovském prostoru pak nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{ (t, 2t, t) \mid t \in \mathbf{R} \}$
b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$.

[6.2.B18]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u} = (3,-7,8)$; $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,1,-2)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,-1)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (-2,2,2,5)$; $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (2,0,1,-1)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (2,7,-3,-6)$;
$W = \{(r+s, r+s, -r-3s, 2r+3s) \mid r,s \in \mathbf{R}\}$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$; $W = [(0,1,0,1)]$

e) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (2,0,1,-4)$;
W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f) $V = \mathbf{R}^5$; $\mathbf{u} = (1,-4,1,-1,2)$; $W = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,-1,0,1,1)$, $\mathbf{w}_2 = (3,2,1,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (1,1,1,1,-1)$

[6.2.B19]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem definovaným:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt ,$$

$\mathbf{u} = x^2 - 2x - 2$,
$W = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$, kde $\mathbf{f}_1 = 5x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{f}_2 = 4x - 1$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem definovaným:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt ,$$

$\mathbf{u} = 2x^2 + 2x + 5$,
$W = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$, kde $\mathbf{f}_1 = 3x^2 - 1$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + 2$.

[6.2.B20]. V euklidovském prostoru V nechť jsou dány podprostory $W_1 = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s]$. Dokažte, že pak platí:

$$W_1 \perp W_2 \iff \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ pro } \forall\, i,j .$$

[6.2.B21]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory, resp. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory takové, že platí: $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{v}_j$, pro $\forall\, i,j$.
Dokažte, že pak:

$$\dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s] = r + s .$$

[6.2.B22]. Nechť ze zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ($k \geq 2$) dostaneme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu postupně vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$.
Dokažte, že pak pro $2 \leq i \leq k$ platí:

a) $\|\mathbf{e}_i\| \leq \|\mathbf{u}_i\|$

b) $\mathbf{e}_i = \mathbf{o} \iff \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]$

c) $\mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i \iff \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]^{\perp}$

d) $\mathbf{e}_i$ je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u}_i$ na podprostor $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]^{\perp}$.

[6.2.B23]. Nechť ze zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ($k \geq 2$) dostaneme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu postupně vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$.
Dokažte, že pak Gramovy determinanty vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ a vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ (viz cvičení [6.1.B15]) jsou si rovny, tj.

$$G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k).$$

(Návod: využijte toho, že pro $i = 2, \dots, k$ lze psát (proč?)

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i + t_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + t_{i,i-1}\mathbf{u}_{i-1} .$$

S využitím tohoto faktu počítejte $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ tak, že postupně upravujete řádky (počínaje posledním) a potom analogicky upravujete sloupce.)

[6.2.B24]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$. Dokažte, že platí:

$$G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \geq 0$$

tzn. Gramův determinant libovolných vektorů je vždy nezáporné číslo.

(Návod: využijte výsledku předchozího cvičení.)

KAPITOLA 7:

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

§1: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

[7.1.A1]. U.p. injektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.1.A2]. U.p. surjektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.1.A3]. U.p. bijektivního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, které není lineárním zobrazením.

[7.1.A4]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ takového, že platí : $\varphi(\,(1,0,0)\,) = (1,0)$ a $\varphi(\,(2,0,0)\,) = (0,2)$.

[7.1.A5]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$, jehož defekt je 2.

[7.1.A6]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ takového, že je $\operatorname{Im}\varphi = [\,(1,2,3,4)\,,\,(4,3,2,1)\,]$.

[7.1.A7]. Nechť $\varphi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení, jehož defekt je 4 a hodnost je 5. Uveďte, co všechno lze pak říci o číslech k , n .

[7.1.A8]. U.p. izomorfizmu $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_3[x]$.

[7.1.A9]. U.p. tří různých vektorových prostorů, které jsou navzájem izomorfní.

[7.1.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ bylo injektivní.

♣ ♣ ♣

[7.1.B1]. Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení. Dokažte, že φ je lineární zobrazení právě když platí :

$$\varphi(t\cdot\mathbf{u} + s\cdot\mathbf{v}) = t\cdot\varphi(\mathbf{u}) + s\cdot\varphi(\mathbf{v}) \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V,\ \forall\, t,s \in T\,.$$

[7.1.B2]. Rozhodněte, zda φ je lineární zobrazení, resp. injektivní lineární zobrazení, resp. surjektivní lineární zobrazení, je-li:

a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (\,2x_1 + 3x_2\,,\,4x_3 + 5\,)$
b) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, kde $\varphi((x_1,x_2)) = (\,2x_1 + x_2\,,\,x_2\,,\,x_2 - x_1\,)$
c) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
d) $\varphi : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$, kde $\varphi((z_1,z_2,z_3)) = (\,0\,,\,2z_1 + iz_3\,,\,z_2 + z_3\,)$
e) $\varphi : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_3[x]$, kde $\varphi(ax^2 + bx + c) = 3ax^3 + 2bx^2 + cx$
f) $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi(A) = (\,0\,,\,\det A\,)$.

[7.1.B3]. Nechť $\mathbf{u},\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : V \to V$ je lineárním zobrazením, jestliže pro $\forall\, \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$ je:

a) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)\mathbf{u}_2 + x_2\mathbf{u}_3$ b) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 + (x_1 - x_2)\mathbf{u}_2 + x_1\mathbf{u}_3$
c) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3)\cdot(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$
d) $\varphi(\mathbf{x}) = |x_1|\cdot\mathbf{u}_1 + |x_2|\cdot\mathbf{u}_2 + |x_3|\cdot\mathbf{u}_3$.

[7.1.B4]. Pro zadané lineární zobrazení φ nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$. Přitom:

a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1{+}x_2\,,\,x_2{+}x_3\,,\,x_3{+}x_1\,,\,x_1)$
b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (\,x_1 + x_2\,,\,x_2 + x_3\,)$
c) $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
d) $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) =$
$(\,3x_1{-}x_2{+}2x_3{-}x_4\,,\,5x_1{+}2x_2{+}3x_3\,,\,2x_1{+}3x_2{+}x_3{+}x_4\,)$
e) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, kde φ je zadáno určením obrazů báze:
$\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$,
$\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$
f) $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$, kde φ je zadáno určením obrazů báze:
$\varphi((1,0,0,0,0)) = (1,2,1)$, $\varphi((1,1,0,0,0)) = (-1,1,0)$,
$\varphi((1,1,1,0,0)) = (1,5,2)$, $\varphi((1,1,1,1,0)) = (0,3,1)$,
$\varphi((1,1,1,1,1)) = (2,1,1)$
g) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{2n}$, kde $\varphi((x_1,x_2)) = (\,x_1\,,\,x_2\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_1\,,\,x_2\,)$
h) $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$,
kde $\varphi((x_1,x_2,\ldots,x_n)) = (\,x_1\,,\,x_1{+}x_2\,,\,\ldots\,,\,x_1{+}x_2{+}\ldots{+}x_n\,)$.

[7.1.B5]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n-1}[x]$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \cdots + 2\,a_2\,x + a_1 .$$

Potom:
a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda zobrazení φ je injektivní, resp. surjektivní
c) určete defekt a hodnost lineárního zobrazení φ
d) nalezněte bázi jádra Ker φ.

[7.1.B6]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n+1}[x]$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = \frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}\,x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}\,x^2 + a_0\,x .$$

Potom:
a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda zobrazení φ je injektivní, resp. surjektivní
c) určete defekt a hodnost lineárního zobrazení φ
d) nalezněte bázi jádra Ker φ.

[7.1.B7]. Lineární zobrazení $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$ je zadáno určením obrazů pevné báze takto:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (2,1) \quad , \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1,1)$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,1) \quad , \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,-1).$$

Potom:
a) nalezněte obecný předpis pro zobrazení φ
b) popište množinu Ker φ a množinu Im φ
c) nalezněte bázi jádra Ker φ a bázi obrazu Im φ
d) nalezněte všechny matice X, pro něž je $\varphi(X) = (1,1)$.

[7.1.B8]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}^{n+1}$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} \in \mathbf{R}_n[x]$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = (\ f(1)\ ,\ f'(1)\ ,\ f''(1)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(1)\ )$$

(kde $f^{(i)}(1)$ značí i-tou derivaci polynomu $\mathbf{f}$ v bodě 1). Potom:
a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda φ je izomorfizmus.

[7.1.B9]. Rozhodněte, zda zadané vektorové prostory V a V' jsou izomorfní. Přitom:
a) $V = \mathbf{R}^2$, $V' = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$)
b) $V = \mathbf{R}$ (nad $\mathbf{R}$) , $V' = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$)
c) $V = \mathbf{R}^3$, $V' = \mathbf{Q}^3$
d) $V = \mathbf{R}^n$, $V' = \mathbf{R}_n[x]$
e) $V = \mathbf{R}_2[x]$, $V' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$
f) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, $V' = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 = x_4\}$.

[7.1.B10]. Nechť V, V' jsou nenulové vektorové prostory nad T, nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z V, resp. nechť $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_k$ jsou libovolné vektory z V'. Potom dokažte, že
a) existuje lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že platí:

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}'_1\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}'_k$$

b) toto lineární zobrazení φ je určeno jednoznačně $\iff$ dim $V = k$.

[7.1.B11]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí:
φ je injektivní zobrazení $\iff$ $\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n)$ jsou lineárně nezávislé.

[7.1.B12]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je injektivní lineární zobrazení. Dokažte, že platí:
$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé $\iff$ $\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé.

[7.1.B13]. Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T a dále nechť $\varphi : V \to V'$ je izomorfizmus.
Dokažte, že pak $\varphi^{-1} : V' \to V$ je také izomorfizmus.

[7.1.B14]. Nechť $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V''$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že platí:
a) $\psi \circ \varphi$ je injektivní zobrazení $\iff$ φ je injektivní zobrazení a Im $\varphi \cap$ Ker $\psi = \{\mathbf{o}\}$
b) $\psi \circ \varphi$ je surjektivní zobrazení $\iff$ ψ je surjektivní zobrazení a Im φ + Ker $\psi = V'$.

[7.1.B15]. Nechť V, V' jsou dva vektorové prostory nad T takové, že je dim $V >$ dim V'. Nechť dále $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V$ jsou lineární zobrazení.
Dokažte, že pak zobrazení $\psi \circ \varphi$ není injektivní a není surjektivní.

[7.1.B16]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť W' je podprostor ve V'. Označme:

$$H = \{\mathbf{x} \in V \mid \varphi(\mathbf{x}) \in W'\}.$$

Dokažte, že H je podprostor vektorového prostoru V.

§2: LINEÁRNÍ TRANSFORMACE A JEJÍ MATICE

[7.2.A1]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$, která
a) není injektivní b) je injektivní a není surjektivní.

[7.2.A2]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že
a) $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$ b) $\operatorname{Im}\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

[7.2.A3]. U.p. neidentické lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že $\mathbf{R}^4 = \operatorname{Ker}\varphi \dot{+} \operatorname{Im}\varphi$.

[7.2.A4]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru V tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, přičemž
a) $V = \mathbf{R}^4$ b) $V = \mathbf{R}^5$.

[7.2.A5]. U.p. dvou lineárních transformací φ, ψ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\varphi + \psi$ je identická transformace prostoru $\mathbf{R}^3$.

[7.2.A6]. U.p. vektorového prostoru V tak, aby vektorový prostor $\mathcal{L}(V)$ všech lineárních transformací prostoru V měl dimenzi
a) $\dim \mathcal{L}(V) = 8$ b) $\dim \mathcal{L}(V) = 9$.

[7.2.A7]. U.p. dvou různých matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které jsou maticemi téže lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$.

[7.2.A8]. U.p. dvou matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, které jsou podobné a mají různé charakteristické polynomy.

[7.2.A9]. U.p. dvou matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, které nejsou podobné a mají stejnou hodnost.

[7.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby lineární transformace φ vektorového prostoru V byla bijektivním zobrazením.

♣ ♣ ♣

[7.2.B1]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $t_0 \in T$ je pevný prvek.
Dokažte, že zobrazení $\varphi : V \to V$ definované:

$$\varphi(\mathbf{u}) = t_0 \cdot \mathbf{u}\,, \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in V$$

je lineární transformací prostoru V .

[7.2.B2]. Nechť V je jednodimenzionální vektorový prostor (nad T) a nechť φ je lineární transformace prostoru V.
Dokažte, že pak existuje číslo $t_0 \in T$ tak, že platí:

$$\varphi(\mathbf{u}) = t_0 \cdot \mathbf{u}\,, \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in V\,.$$

[7.2.B3]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Nechť φ je lineární transformace prostoru V, zadaná určením obrazů této báze:

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2\,, \quad \varphi(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\,, \quad \varphi(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2\,.$$

Potom:
a) nalezněte bázi $\varphi(V)$
b) nalezněte dva dvoudimenzionální podprostory W_1 , resp. W_2 ve V tak, že platí:

$$\varphi(W_1) = W_1\,, \quad \text{resp.} \quad \varphi(W_2) \not\subseteq W_2\,.$$

[7.2.B4]. Lineární transformace $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ je definována vztahem :

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3\,, 2x_1 + x_3\,, x_1 - 3x_2 + x_3)\,.$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, je-li:
a) $\mathbf{u}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,0)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,-1)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,2)$.

[7.2.B5]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V je zadána určením obrazů pevné báze. Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $\varphi((2,3,5)) = (1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,1,-1)$, $\varphi((1,0,0)) = (2,1,2)$;
$\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$

b) $V = \mathbf{R}^3$, $\varphi((2,4,1)) = (0,5,1)$, $\varphi((-1,3,-2)) = (-5,1,1)$, $\varphi((3,-1,4)) = (7,3,-1)$;
$\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,2)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, $\varphi(x^2 + x + 1) = x^2 + x$, $\varphi(x + 1) = 4x^2 + 3x + 6$, $\varphi(x^2 + 1) = 2x^2 + x + 3$;
$\mathbf{u}_1 = 2x^2 + 2x + 3$, $\mathbf{u}_2 = 2x^2 + 4x + 5$, $\mathbf{u}_3 = x^2 + 3x + 3$.

[7.2.B6]. Je dána pevná matice $A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definujeme dvě zobrazení φ, resp. $\psi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takto:

$$\varphi(X) = A \cdot X \ , \quad \text{resp. } \psi(X) = X \cdot A \ , \qquad \text{pro } \forall\, X \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) .$$

Potom:

a) dokažte, že φ, resp. ψ je lineární transformace vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

b) nalezněte matici lineární transformace φ v bázi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) nalezněte matici lineární transformace ψ v bázi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B7]. Definujeme zobrazení φ, resp. $\psi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x]$ takto:

$$\varphi(f(x)) = f'(x) \ , \quad \text{resp. } \psi(f(x)) = x \cdot f'(x) \ , \qquad \text{pro } \forall\, f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$$

kde $f'(x)$ značí derivaci polynomu $f(x)$.
Potom:

a) dokažte, že φ, resp. ψ je lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}_n[x]$

b) nalezněte matici lineární transformace φ, resp. matici lineární transformace ψ v bázi $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

[7.2.B8]. Nechť lineární transformace φ vektorového prostoru V má v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matici A.
Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$;

$\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)$;

$\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,-1,1)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $V = \mathbf{R}^3$;

$\mathbf{u}_1 = (8,-6,7)$, $\mathbf{u}_2 = (-16,7,-13)$, $\mathbf{u}_3 = (9,-3,7)$;

$\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (3,-1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,1,2)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$;

$\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$, $\mathbf{u}_3 = x^2$;

$\mathbf{v}_1 = -x^2 + x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 - x + 1$, $\mathbf{v}_3 = x - 1$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B9]. Je dána lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ (určením obrazů pevné báze) a dále je dán vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$.
Nalezněte všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ s vlastností: $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, je-li:

a) $\varphi((1,1,1)) = (2,2,6)$, $\varphi((2,-1,0)) = (1,-3,-1)$,
$\varphi((1,2,3)) = (3,7,13)$;
$\mathbf{u} = (1,3,5)$

b) $\varphi((3,-3,2)) = (0,-1,1)$, $\varphi((2,1,-1)) = (3,0,3)$,
$\varphi((-4,0,3)) = (-4,3,-7)$;
$\mathbf{u} = (1,2,1)$

c) $\varphi((1,1,1)) = (1,1,0)$, $\varphi((1,1,0)) = (1,0,-1)$,
$\varphi((1,0,0)) = (2,3,-1)$;
$\mathbf{u} = (2,1,1)$.

[7.2.B10]. Nalezněte jádro $\mathrm{Ker}\,\varphi$ a obraz $\mathrm{Im}\,\varphi$ dané lineární transformace φ vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $\varphi((1,-1,2)) = (-3,0,9)$, $\varphi((2,1,3)) = (4,0,-12)$,
$\varphi((-1,0,2)) = (-4,0,12)$

b) $V = \mathbf{R}^3$;
$\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 \ , \ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ , \ 2x_1 + x_3)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$;
$\varphi(ax^2+bx+c) = (4a - 5b + 2c)x^2 + (5a - 7b + 3c)x + (6a - 9b + 4c)$.

[7.2.B11]. Nechť lineární transformace φ vektorového prostoru V (nad $\mathbf{Q}$) má v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matici

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ a & 2a & 3a \\ 16 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Potom:

a) v závislosti na parametru $a \in \mathbf{Q}$ nalezněte $\dim \operatorname{Ker} \varphi$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi$

b) pro hodnotu $a = 3$ nalezněte bázi $\operatorname{Ker} \varphi$ a bázi $\operatorname{Im} \varphi$.

[7.2.B12]. Nalezněte automorfizmus φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, pro který platí:

$$\varphi = \varphi^{-1} \quad \wedge \quad \varphi((0,0,1)) = (0,0,1) \quad \wedge \quad \varphi((2,3,1)) = (1,0,2).$$

[7.2.B13]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, definované:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2\,,\, x_1 - x_2)\,, \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1\,,\, x_1 + 3x_2)\,.$$

Potom:

a) definujte lineární transformaci $\varphi + \psi$, resp. $\varphi \circ \psi$, resp. $\psi \circ \varphi$, resp. $3 \cdot \varphi$

b) nalezněte matici lineární transformace φ, resp. ψ, resp. $\varphi + \psi$, resp. $\varphi \circ \psi$, resp. $\psi \circ \varphi$, resp. $3 \cdot \varphi$ v bázi $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3)$.

[7.2.B14]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ takové, že φ má v bázi $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3)$ matici A, resp. ψ má v bázi $\mathbf{v}_1 = (3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (4,2)$ matici B.
Nalezněte matici C lineární transformace $\varphi + \psi$ v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

[7.2.B15]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace prostoru $\mathbf{R}^2$ takové, že φ má v bázi $\mathbf{u}_1 = (2,7)$, $\mathbf{u}_2 = (1,3)$ matici A, resp. ψ má v bázi $\mathbf{v}_1 = (6,7)$, $\mathbf{v}_2 = (5,6)$ matici B.
Nalezněte matici C lineární transformace $\varphi \circ \psi$ v bázi $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

[7.2.B16]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V s vlastností: $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
Dokažte, že potom platí: $V = \operatorname{Ker} \varphi \dotplus \operatorname{Im} \varphi$.
(Návod: využijte toho, že: $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.)

[7.2.B17]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$ je báze vektorového prostoru V.
Dokažte, že posloupnost lineárních transformací $\varphi_{ij} : V \to V$, definovaných pro $\forall\, i, j = 1, \ldots, n$ takto:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{pro } k = j \\ \mathbf{o} & \text{pro } k \neq j \end{cases} \qquad \text{kde } k = 1, \ldots, n$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V).

[7.2.B18]. Nechť W je podprostor vektorového prostoru V (nad T), přičemž $\dim V = n$, $\dim W = k$. Nechť

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{L}(V) \mid \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \text{ pro } \forall\, \mathbf{x} \in W\}.$$

Potom:

a) dokažte, že $\mathcal{H}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V)

b) určete dimenzi podprostoru $\mathcal{H}$.

[7.2.B19]. Nechť α je pevná lineární transformace vektorového prostoru V (nad T).
Dokažte, že zobrazení $F : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ definované:

$$F(\varphi) = \alpha \circ \varphi\,, \qquad \text{pro } \forall\, \varphi \in \mathcal{L}(V)$$

je lineární transformací vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V).

[7.2.B20]. Rozhodněte, zda dané matice $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ jsou podobné, je-li:

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B21]. Jsou dány podobné matice $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$.
Nalezněte nějakou regulární matici S tak, aby platilo: $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, je-li:

a) $$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$$

[7.2.B22]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ jsou podobné matice.
Dokažte, že:

a) A^n, B^n jsou podobné matice (pro libovolné přirozené n)

b) jsou-li A, B navíc regulární, pak A^{-1}, B^{-1} jsou podobné matice.

[7.2.B23]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$, kde $n \geq 2$. Pak:

a) dokažte, že je-li alespoň jedna z matic A, B regulární, pak matice $A \cdot B$ a matice $B \cdot A$ jsou podobné

b) rozhodněte, zda předchozí tvrzení platí i v případě, že obě matice A, B jsou singulární.

[7.2.B24]. Je dána matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$. Určete charakteristický polynom matice A a nalezněte jeho kořeny (ležící v T), je-li:

a) $T = \mathbf{R}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $T = \mathbf{K}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $T = \mathbf{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ d) $T = \mathbf{R}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

[7.2.B25]. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ je horní trojúhelníková matice (tzn. platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$).
Dokažte, že pak diagonální prvky matice A jsou kořeny jejího charakteristického polynomu.

[7.2.B26]. Nechť je dána matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$.
Dokažte, že matice A a k ní transponovaná matice A' mají stejné charakteristické polynomy.

§3: VLASTNÍ VEKTORY A VLASTNÍ HODNOTY LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

[7.3.A1]. U.p. podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby W byl invariantním podprostorem vzhledem ke každé lineární transformaci prostoru $\mathbf{R}^4$.

[7.3.A2]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}_4[x]$ tak, aby každý podprostor v $\mathbf{R}_4[x]$ byl invariantní vzhledem k φ.

[7.3.A3]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, aby jedinými invariantními podprostory vzhledem k φ byly triviální podprostory.

[7.3.A4]. U.p. nenulové lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby podprostor $W = [(1,2,3), (4,5,6)]$ byl invariantní vzhledem k φ.

[7.3.A5]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ a invariantních podprostorů W_1, W_2 tak, aby jejich součet $W_1 + W_2$ nebyl invariantním podprostorem vzhledem k φ.

[7.3.A6]. U.p. vektorového prostoru V a jeho lineární transformace φ takové, že φ nemá žádný vlastní vektor.

[7.3.A7]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, která má právě 3 různé vlastní hodnoty.

[7.3.A8]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, která má právě 3 různé vlastní hodnoty.

[7.3.A9]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby vektory $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ byly vlastními vektory φ, příslušnými navzájem různým vlastním hodnotám.

[7.3.A10]. U.p. podmínky, která je nutná, ale nikoliv dostatečná pro to, aby vektor $\mathbf{u} \in V$ byl vlastním vektorem lineární transformace φ prostoru V.

♣ ♣ ♣

[7.3.B1]. Lineární transformace φ prostoru $\mathbf{R}^4$ je v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ dána maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozhodněte, zda podprostor W je invariantní vzhledem k φ, je-li:

a) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$

b) $W = [2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4]$.

[7.3.B2]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) a nechť W je invariantní podprostor vzhledem k φ. Označme.:

$$U = \{\mathbf{x} \in V \mid \varphi(\mathbf{x}) \in W\}.$$

Dokažte, že pak $\varphi(W)$ a U jsou podprostory ve V, které jsou invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B3]. Nechť φ je automorfizmus (tj. bijektivní lineární transformace) vektorového prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ. Dokažte, že pak:

a) $\varphi(W) = W$

b) W je invariantní podprostor vzhledem k lineární transformaci φ^{-1}.

(Návod: při a) nejprve dokažte, že $\dim \varphi(W) = \dim W$.)

[7.3.B4]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V nad $\mathbf{K}$ je dána maticí A (v pevné bázi).
Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory (vyjádřené souřadnicemi v této bázi) lineární transformace φ, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[7.3.B5]. Nechť φ značí lineární transformaci derivování ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_n[x]$, tzn. platí :

$$\varphi(f(x)) = f'(x)\,, \qquad \text{pro každé } f(x) \in \mathbf{R}_n[x].$$

Potom nalezněte:
a) charakteristický polynom lineární transformace φ
b) vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace φ.

[7.3.B6]. Nechť V je vektorový prostor (nad T) a nechť φ je lineární transformace prostoru V. Dokažte, že pak platí:
každý nenulový vektor z V je vlastním vektorem lineární transformace $\varphi \iff \exists\, t_0 \in T : \varphi = t_0 \cdot id_V$.

[7.3.B7]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť λ_0 je vlastní hodnota φ.
Dokažte, že pak množina W všech vlastních vektorů φ, příslušných vlastní hodnotě λ_0, spolu s nulovým vektorem tvoří podprostor ve V, který je navíc invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B8]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou vlastní vektory této lineární transformace.
Dokažte, že pak podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$ je invariantním podprostorem vzhledem k φ.

[7.3.B9]. Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ je v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dána maticí $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Nalezněte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, které jsou invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B10]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V; nechť $\mathbf{u}_1$, resp. $\mathbf{u}_2$ jsou vlastní vektory transformace φ, příslušné k různým vlastním hodnotám λ_1, resp. λ_2.
Dokažte, že potom vektor $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ není vlastním vektorem φ.
(Návod: důkaz veďte sporem; využijte toho, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou lineárně nezávislé.)

[7.3.B11]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V; nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ jsou vlastní vektory lineární transformace φ, příslušné k různým vlastním hodnotám.
Dokažte, že pak:
vektor $(t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_r\mathbf{u}_r)$ je vlastním vektorem $\varphi \iff$ právě jeden z koeficientů $t_1, \ldots, t_r$ je nenulový.

[7.3.B12]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V nad $\mathbf{R}$ nechť je dána maticí A (v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ prostoru V).
Potom nalezněte všechny podprostory ve V, které jsou invariantní vzhledem k transformaci φ, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[7.3.B13]. Nechť lineární transformace φ n-dimenzionálního vektorového prostoru V má vlastní hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (přitom každá vlastní hodnota se počítá tolikrát, kolik je její násobnost). Nechť $A = (a_{ij})$ je matice lineární transformace φ.
Dokažte, že potom platí:
a) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$
b) $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$
c) lineární transformace $\varphi \circ \varphi$ má vlastní hodnoty $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

[7.3.B14]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) a nechť $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem φ i ψ.
Dokažte, že pak:
a) vektor $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem lineární transformace $t \cdot \varphi$ (pro libovolné $t \in T$)
b) vektor $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem lineární transformace $\varphi + \psi$.

[7.3.B15]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) takového, že $\dim V = n \geq 2$. Nechť dále λ_1 je vlastní hodnota lineární transformace φ, resp. λ_2 je vlastní hodnota lineární transformace ψ.
Ukažte, že potom číslo $(\lambda_1 + \lambda_2)$ nemusí být vlastní hodnotou lineární transformace $\varphi + \psi$.

§4: ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ, ORTOGONÁLNÍ MATICE

Úmluva. Všude v této kapitole, ve všech příkladech o euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ se předpokládá (není-li výslovně řečeno jinak), že skalární součin je v prostoru $\mathbf{R}^n$ definován "obvyklým způsobem", tzn. pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \, .$$

[7.4.A1]. U.p ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

[7.4.A2]. U.p. ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.4.A3]. U.p. ortogonální transformace φ euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby tato transformace φ nebyla surjektivním zobrazením.

[7.4.A4]. Uveďte, co všechno lze říci o dimenzích euklidovských prostorů V, V', víte-li, že nulové lineární zobrazení $\omega : V \to V'$ je ortogonálním zobrazením.

[7.4.A5]. U.p. euklidovského prostoru, který je izomorofní s euklidovským prostorem $\mathbf{R}^5$.

[7.4.A6]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ definujte dvěma různými způsoby skalární součin tak, aby vzniklé euklidovské prostory nebyly izomorfní.

[7.4.A7]. Vypište všechny ortogonální matice řádu 2 , jejichž prvky jsou celá čísla.

[7.4.A8]. U.p. ortotgonálních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, takových, že $A \cdot B \neq B \cdot A$.

[7.4.A9]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou ortogonální, ale jejich součin $A \cdot B$ je ortogonální maticí.

[7.4.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{R})$ byla ortogonální.

♣ ♣ ♣

[7.4.B1]. Nechť $\mathbf{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbf{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž je skalární součin definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2\, x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \, .$$

Rozhodněte, zda zobrazení f je ortogonálním zobrazením, jestliže:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2)) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_2 \, , \, \sqrt{2} \cdot x_1)$

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 \, , \, x_3 \, , \, -x_2)$

c) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} \cdot (2x_1 - x_2 + 2x_3 \, , \, x_1 - 2x_2 - 2x_3 \, , \, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$

d) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (0 \, , 0)$

e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 \, , \, x_3)$

f) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2)) = (0 \, , \, x_1 \, , \, x_1 + x_2)$.

[7.4.B2]. Nechť V, V' jsou euklidovské prostory, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení s vlastností:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \, .$$

Dokažte, že potom φ je lineární zobrazení.

(Návod: dokazujte, že:

$$(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}))^2 = 0 \quad \wedge \quad (\varphi(t \cdot \mathbf{u}) - t \cdot \varphi(\mathbf{u}))^2 = 0$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a libovolné $t \in \mathbf{R}$.)

[7.4.B3]. Ukažte, že zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (kde $n \geq 2$) s vlastností:

$$\| \mathbf{u} \| = \| \varphi(\mathbf{u}) \| \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$$

nemusí obecně být lineárním zobrazením.

[7.4.B4]. Nechť V, V' jsou euklidovské prostory, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení, splňující podmínky:

(i) $\| \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}) \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \qquad$ pro $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(ii) $\| \varphi(\mathbf{o}) \| = 0$

Dokažte, že potom φ je lineární zobrazení.

(Návod: nejprve dokazujte, že $\| \varphi(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|$, potom dokazujte, že $\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a využijte výsledku cvičení [7.4.B2].)

[7.4.B5]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V a nechť φ je lineární transformace prostoru V taková, že pro vektory této dané báze platí

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) \qquad \text{pro } \forall\, i, j = 1, \dots, n\,.$$

Dokažte, že pak φ je ortogonální transformací prostoru V.

[7.4.B6]. Nechť V je jednodimenzionální euklidovský prostor a nechť φ je ortogonální transformace prostoru V.
Dokažte, že pak:

$$\text{buď je } \varphi = \mathrm{id}_V \quad \text{nebo} \quad \text{platí } \varphi(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\,, \quad \text{pro } \forall\, \mathbf{x} \in V\,.$$

[7.4.B7]. Nechť φ, ψ jsou ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť $t \in \mathbf{R}$.
Dokažte, že pak:

a) $\varphi \circ \psi$ je ortogonální transformace prostoru V
b) $t \cdot \varphi$ je ortogonální transformace prostoru $V \iff t = \pm 1$.

[7.4.B8]. Nechť φ je ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ.
Dokažte, že pak platí: $\varphi(W) = W$.

[7.4.B9]. Nechť φ je ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ.
Dokažte, že pak podprostor $W^{\perp}$ je též invariantní vzhledem k φ.

[7.4.B10]. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že matice A je ortogonální právě když pro každé $i, j = 1, \dots, n$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \\ 0 & \text{je-li } i \neq j \end{cases}$$

[7.4.B11]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že když matice A má dvě z následujících tří vlastností:

(i) A je symetrická matice
(ii) A je ortogonální matice
(iii) $A^2 = E_n$

potom má i vlastnost třetí.

[7.4.B12]. Nechť matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ je kososymetrická matice (tzn. $A' = -A$) a nechť matice $(E_n - A)$ a $(E_n + A)$ jsou regulární.
Dokažte, že potom:

a) matice $(E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}$ je ortogonální
b) matice $(E_n + A) \cdot (E_n - A)^{-1}$ je ortogonální.

(Návod: nejprve ukažte, že matice $(E_n + A)$ a $(E_n - A)^{-1}$ jsou zaměnitelné, resp. matice $(E_n - A)$ a $(E_n + A)^{-1}$ jsou zaměnitelné a při vlastním důkazu ortogonálnosti tuto skutečnost využijte.)

[7.4.B13]. Rozhodněte, zda daná matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ je ortogonální:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{4-\sqrt{2}}{6} & 0 & \frac{4+\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$$

[7.4.B14]. Určete čísla $r, s, t \in \mathbf{R}$ tak, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ byla ortogonální a potom spočtěte determinant $\det A$. Přitom:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} r & 0 & 2s \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & t & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -r & -\frac{1}{\sqrt{2}} & s \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ r & s & t \end{bmatrix}$$

[7.4.B15]. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je dána báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ a báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Rozhodněte, zda matice přechodu A od báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ k bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je ortogonální. Je nutné přitom matici A počítat?

a) $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\mathbf{v}_1 = (\frac{4+\sqrt{2}}{6}, \frac{1-2\sqrt{2}}{6}, \frac{1-2\sqrt{2}}{6})$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{4-\sqrt{2}}{6}, \frac{1+2\sqrt{2}}{6}, \frac{1+2\sqrt{2}}{6})$,

$\mathbf{v}_3 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.