Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.5.–14.5.2020

K větám 1.13 a 1.14

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ můžeme zadat různými způsoby:

K větám 1.13 a 1.14

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ můžeme zadat různými způsoby:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2,\, x_2,\, x_2 - x_1)$$

K větám 1.13 a 1.14

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ můžeme zadat různými způsoby:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 - x_1)$$

$$\varphi((1,0)) = (2,0,-1),\ \varphi((0,1)) = (1,1,1)$$

K větám 1.13 a 1.14

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ můžeme zadat různými způsoby:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2,\, x_2,\, x_2 - x_1)$$

$$\varphi((1,0)) = (2,0,-1),\ \varphi((0,1)) = (1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 0)$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1)$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1) \Longrightarrow \varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot (2, 0, -1) + x_2 \cdot (1, 1, 1)$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2,0,-1)$, $(1,1,1)$ a $(0,1,0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (0,1) \Longrightarrow \varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot (2,0,-1) + x_2 \cdot (1,1,1)$$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1' \cdot (2,0,1) + x_2' \cdot (1,1,1) + x_3' \cdot (0,1,0)$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2,0,-1)$, $(1,1,1)$ a $(0,1,0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (0,1) \Longrightarrow \varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot (2,0,-1) + x_2 \cdot (1,1,1)$$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1' \cdot (2,0,1) + x_2' \cdot (1,1,1) + x_3' \cdot (0,1,0)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= x_1 \cdot (1 \cdot (2,0,1) + 0 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,0)) + \\ &= x_2 \cdot (0 \cdot (2,0,1) + 1 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,0)) \end{aligned}$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2,0,-1)$, $(1,1,1)$ a $(0,1,0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (0,1) \Longrightarrow \varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot (2,0,-1) + x_2 \cdot (1,1,1)$$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1' \cdot (2,0,1) + x_2' \cdot (1,1,1) + x_3' \cdot (0,1,0)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= x_1 \cdot (1 \cdot (2,0,1) + 0 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,0)) + \\ &= x_2 \cdot (0 \cdot (2,0,1) + 1 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,0)) \end{aligned}$$

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_3' = 0$$

K větám 1.13 a 1.14

Mějme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ zvolme bázi $(2, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 0)$

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1) \Longrightarrow \varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot (2, 0, -1) + x_2 \cdot (1, 1, 1)$$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1' \cdot (2, 0, 1) + x_2' \cdot (1, 1, 1) + x_3' \cdot (0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= x_1 \cdot (1 \cdot (2, 0, 1) + 0 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 1, 0)) + \\ &= x_2 \cdot (0 \cdot (2, 0, 1) + 1 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 1, 0)) \end{aligned}$$

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_3' = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7.2.B4 b)

Lineární transformace $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána vztahem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, -1)$.

7.2.B4 b)

Lineární transformace $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána vztahem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, -1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(2, 3, -1) = \varphi((1, 1, 1)) &= a_{11}(1, 1, 1) + a_{21}(0, 1, 1) + a_{31}(0, 0, -1) \\
(2, 1, -2) = \varphi((0, 1, 1)) &= a_{12}(1, 1, 1) + a_{22}(0, 1, 1) + a_{32}(0, 0, -1) \\
(-1, -1, -1) = \varphi((0, 0, -1)) &= a_{13}(1, 1, 1) + a_{23}(0, 1, 1) + a_{33}(0, 0, -1)
\end{aligned}$$

7.2.B4 b)

Lineární transformace $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána vztahem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, -1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(2,3,-1) = \varphi((1,1,1)) &= a_{11}(1,1,1) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(0,0,-1)\\
(2,1,-2) = \varphi((0,1,1)) &= a_{12}(1,1,1) + a_{22}(0,1,1) + a_{32}(0,0,-1)\\
(-1,-1,-1) = \varphi((0,0,-1)) &= a_{13}(1,1,1) + a_{23}(0,1,1) + a_{33}(0,0,-1)
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

7.2.B4 b)

Lineární transformace $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána vztahem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, -1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(2, 3, -1) = \varphi((1, 1, 1)) &= a_{11}(1, 1, 1) + a_{21}(0, 1, 1) + a_{31}(0, 0, -1)\\
(2, 1, -2) = \varphi((0, 1, 1)) &= a_{12}(1, 1, 1) + a_{22}(0, 1, 1) + a_{32}(0, 0, -1)\\
(-1, -1, -1) = \varphi((0, 0, -1)) &= a_{13}(1, 1, 1) + a_{23}(0, 1, 1) + a_{33}(0, 0, -1)
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$(4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3)$$
$$(7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3)\\ (7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$\begin{aligned} (4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3) \\ (7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 & -15 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1,x_2)) = (2x_1+x_2, x_1-x_2), \qquad \psi((x_1,x_2)) = (x_1, x_1+3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(4,-1) = \varphi(1,2) = a_{11}(1,2) + a_{21}(2,3)\\ (7,-1) = \varphi(2,3) = a_{12}(1,2) + a_{22}(2,3)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 0 & -14 & -23 \\ 0 & 1 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$(4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3)$$
$$(7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -14 & -23 \\ 0 & 1 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

Analogicky:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$\begin{aligned} (4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3) \\ (7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 0 & -14 & -23 \\ 0 & 1 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

Analogicky:

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

7.2.B13 b)

Nechť φ, ψ jsou transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ definované

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), \qquad \psi((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + 3x_2).$$

Nalezněte matici lineární transformace $\psi \circ \varphi$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(4, -1) = \varphi(1, 2) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 3)\\ (7, -1) = \varphi(2, 3) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 3)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cr|r|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -9 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|r|r} 1 & 0 & -14 & -23 \\ 0 & 1 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

Analogicky:

$$\left(\begin{array}{cc|c|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cr|c|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|r|r} 1 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

$$\psi \circ \varphi = \psi(\varphi(\vec{x})) = \psi((2x_1 + x_2, x_1 - x_2)) = (2x_1 + x_2, 5x_1 - 2x_2)$$

$$\psi \circ \varphi = \psi(\varphi(\vec{x})) = \psi((2x_1 + x_2, x_1 - x_2)) = (2x_1 + x_2, 5x_1 - 2x_2)$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -23 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -13 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{Ker}\, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\mathrm{Im}\, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{Ker}\, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\mathrm{Im}\, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:

$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$,

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\operatorname{Ker}, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\operatorname{Im}, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:

$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$,

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{Ker}\,\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\mathrm{Im}\,\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:

$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$,
resp. $\varphi(1,0,0) = (1,2,3)$, $\varphi(0,1,0) = (4,5,6)$,

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{Ker}\,\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\mathrm{Im}\,\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:

$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$,
resp. $\varphi(1,0,0) = (1,2,3)$, $\varphi(0,1,0) = (4,5,6)$, $\varphi(1,0,0) = (0,0,0)$

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{Ker}, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. $\mathrm{Im}, \varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:
$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$,
resp. $\varphi(1,0,0) = (1,2,3)$, $\varphi(0,1,0) = (4,5,6)$, $\varphi(1,0,0) = (0,0,0)$

7.2. A3

U.p. neidentické lineární transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, že platí $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\,\varphi \dot{+} \mathrm{Im}\,\varphi$.

7.2. A2

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, že Ker, $\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$, resp. Im, $\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

Řešení:

$\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$, $\varphi(4,5,6) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$,
resp. $\varphi(1,0,0) = (1,2,3)$, $\varphi(0,1,0) = (4,5,6)$, $\varphi(1,0,0) = (0,0,0)$

7.2. A3

U.p. neidentické lineární transformace vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, že platí $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}\varphi \dot{+} \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení:

$\varphi(1,0,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,1,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,0,1,0) = (0,0,1,0)$,
$\varphi(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$

7.2. A4

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^5$) tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

7.2. A4

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^5$) tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení:

$\varphi(1,0,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,1,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$,
$\varphi(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$,

7.2. A4

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^5$) tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení:
$\varphi(1,0,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,1,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$,
$\varphi(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$,
resp. neexistuje.

7.2. A4

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^5$) tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení:

$\varphi(1,0,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,1,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$,
$\varphi(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$,
resp. neexistuje.

7.2. A10 a)

U.p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná pro to, aby lineární transformace φ vektorového prostoru V byla bijektivním zobrazením.

7.2. A4

U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^5$) tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení:
$\varphi(1,0,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,1,0,0) = \vec{o}$,
$\varphi(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$,
$\varphi(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$,
resp. neexistuje.

7.2. A10 a)

U.p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná pro to, aby lineární transformace φ vektorového prostoru V byla bijektivním zobrazením.

Řešení: $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$

7.4.B1 a)

Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2}\right).$$

7.4.B1 a)

Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2} \right).$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární.

7.4.B1 a)

Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2}\right).$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární. Navíc

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}, y_1\sqrt{2}\right) = \\ = x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_1.$$

7.4.B1 a)

Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2}\right).$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární. Navíc

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}, y_1\sqrt{2}\right) = \\ = x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_1.$$

Tedy je ortogonální.

7.4.B1 e)

Nechť $\mathbb{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_3)\,.$$

7.4.B1 e)

Nechť $\mathbb{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_3)\,.$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární.

7.4.B1 e)

Nechť $\mathbb{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_3)\,.$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární. Dále

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = (x_1 + x_2, x_3) \cdot (y_1 + y_2, y_3) =$$
$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

7.4.B1 e)

Nechť $\mathbb{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž skalární součin je definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Rozhodněte, zda zobrazení $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonální zobrazení:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_3)\,.$$

Řešení: Zobrazení je zřejmě lineární. Dále

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = (x_1 + x_2, x_3) \cdot (y_1 + y_2, y_3) =$$
$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

Zobrazení není ortogonální.

7.4.B13 b)

Rozhodněte, zda-li matice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

7.4.B13 b)

Rozhodněte, zda-li matice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

Řešení:

$$A \cdot A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

7.4.B13 b)

Rozhodněte, zda-li matice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

Řešení:

$$A \cdot A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ano, matice A je ortogonální.

7.4. B14 a)

Určete čísla r, s, $t \in \mathbb{R}$ tak, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$ byla ortogonální a určete $\det A$.

7.4. B14 a)

Určete čísla r, s, $t \in \mathbb{R}$ tak, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$ byla ortogonální a určete $\det A$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 2s \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & t & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -r & -\frac{1}{\sqrt{2}} & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -r \\ 0 & t & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2s & \frac{1}{\sqrt{6}} & s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2+4s^2 & -\frac{r}{\sqrt{3}}+\frac{2s}{\sqrt{6}} & -r^2+2s^2 \\ -\frac{r}{\sqrt{3}}+\frac{2s}{\sqrt{6}} & t^2+\frac{1}{2} & \frac{r}{\sqrt{3}}-\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{s}{\sqrt{6}} \\ -r^2+2s^2 & \frac{r}{\sqrt{3}}-\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{s}{\sqrt{6}} & r^2+s^2+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
r^2 + 4s^2 \qquad\quad &= 1\\
t^2 &= \tfrac{1}{2}\\
r^2 + \ s^2 \qquad\quad &= \tfrac{1}{2}\\
-\tfrac{r}{\sqrt{3}} + \tfrac{2s}{\sqrt{6}} \qquad\quad &= 0\\
-r^2 + 2s^2 \qquad\quad &= 0\\
\tfrac{r}{\sqrt{3}} + \tfrac{s}{\sqrt{6}} - \tfrac{t}{\sqrt{2}} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 + 4s^2 \qquad &= 1 \\
t^2 &= \tfrac{1}{2} \\
r^2 + s^2 \qquad &= \tfrac{1}{2} \\
-\tfrac{r}{\sqrt{3}} + \tfrac{2s}{\sqrt{6}} \qquad &= 0 \\
-r^2 + 2s^2 \qquad &= 0 \\
\tfrac{r}{\sqrt{3}} + \tfrac{s}{\sqrt{6}} - \tfrac{t}{\sqrt{2}} &= 0
\end{aligned}
$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

nebo

$$r = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$