Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

9.3.–13.3.2020

3.3.B18b

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou LN vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte zda-li vektory $(2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w})$, $(\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w})$, $(3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w})$ jsou LN nebo LZ.

3.3.B18b

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou LN vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte zda-li vektory $(2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w})$, $(\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w})$, $(3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w})$ jsou LN nebo LZ.

Řešení:

$$t_1 \cdot (2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w}) + t_2 \cdot (\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w}) + t_3 \cdot (3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w}) = \vec{o}$$

3.3.B18b

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou LN vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte zda-li vektory $(2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w})$, $(\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w})$, $(3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w})$ jsou LN nebo LZ.

Řešení:

$$t_1 \cdot (2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w}) + t_2 \cdot (\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w}) + t_3 \cdot (3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w}) = \vec{o}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

3.3.B18b

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou LN vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte zda-li vektory $(2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w})$, $(\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w})$, $(3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w})$ jsou LN nebo LZ.

Řešení:

$$t_1 \cdot (2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w}) + t_2 \cdot (\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w}) + t_3 \cdot (3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w}) = \vec{o}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(7,-1,5) \Longrightarrow \vec{u}+4\vec{v}-\vec{w} = 7\cdot(2\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w}) - 5\cdot(3\vec{u}+5\vec{v}+4\vec{w})$$

3.3.A3

U.P. různých vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ tak, že vektor $\vec{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbb{R}^4$, jako vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$.

3.3.A3

U.P. různých vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ tak, že vektor $\vec{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbb{R}^4$, jako vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Řešení: $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, 0, 0)$, $\vec{w} = (3, 3, 0, 0)$

3.3.A3

U.P. různých vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ tak, že vektor $\vec{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbb{R}^4$, jako vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Řešení: $\vec{u} = (1,1,0,0)$, $\vec{v} = (2,2,0,0)$, $\vec{w} = (3,3,0,0)$

3.3.A6

U.P. vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$, které jsou lineárně závislé, a vektor $\vec{u}$ nelze vyjádřit jako kombinaci $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

3.3.A3

U.P. různých vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ tak, že vektor $\vec{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbb{R}^4$, jako vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Řešení: $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, 0, 0)$, $\vec{w} = (3, 3, 0, 0)$

3.3.A6

U.P. vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$, které jsou lineárně závislé, a vektor $\vec{u}$ nelze vyjádřit jako kombinaci $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Řešení: $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, 2, 0, 0)$

3.3.A9

U.p. vektorů z $\mathbb{R}^3$, které

a) jsou LN a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

b) jsou LN a generují prostor $\mathbb{R}^3$

c) jsou LZ a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

d) jsou LZ a generují prostor $\mathbb{R}^3$

3.3.A9

U.p. vektorů z $\mathbb{R}^3$, které

a) jsou LN a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

b) jsou LN a generují prostor $\mathbb{R}^3$

c) jsou LZ a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

d) jsou LZ a generují prostor $\mathbb{R}^3$

Řešení:

a) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$

3.3.A9

U.p. vektorů z $\mathbb{R}^3$, které

a) jsou LN a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

b) jsou LN a generují prostor $\mathbb{R}^3$

c) jsou LZ a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

d) jsou LZ a generují prostor $\mathbb{R}^3$

Řešení:

a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$

b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

3.3.A9

U.p. vektorů z $\mathbb{R}^3$, které

a) jsou LN a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$
b) jsou LN a generují prostor $\mathbb{R}^3$
c) jsou LZ a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$
d) jsou LZ a generují prostor $\mathbb{R}^3$

Řešení:

a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$
b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
c) $(1,0,0)$, $(2,0,0)$

3.3.A9

U.p. vektorů z $\mathbb{R}^3$, které

a) jsou LN a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

b) jsou LN a generují prostor $\mathbb{R}^3$

c) jsou LZ a negenerují prostor $\mathbb{R}^3$

d) jsou LZ a generují prostor $\mathbb{R}^3$

Řešení:

a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$

b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

c) $(1,0,0)$, $(2,0,0)$

d) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$

3.4.B3c)

Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž vektory $f_1 = ax^2 - 4x - 1$, $f_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $f_3 = x^2 + x - a$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

3.4.B3c)

Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž vektory $f_1 = ax^2 - 4x - 1$, $f_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $f_3 = x^2 + x - a$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

Řešení: $t_1 \cdot (ax^2 - 4x - 1) + t_2 \cdot (4x^2 - 6x - 3) + t_3 \cdot (x^2 + x - a) = 0$

3.4.B3c)

Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž vektory $f_1 = ax^2 - 4x - 1$, $f_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $f_3 = x^2 + x - a$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

Řešení: $t_1 \cdot (ax^2 - 4x - 1) + t_2 \cdot (4x^2 - 6x - 3) + t_3 \cdot (x^2 + x - a) = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ a & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 6 & 1+4a & 0 \\ 0 & 4-3a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 6 & 1+4a & 0 \\ 0 & 0 & 6a^2-13a+2 & 0 \end{array}\right)$$

3.4.B3c)

Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž vektory $f_1 = ax^2 - 4x - 1$, $f_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $f_3 = x^2 + x - a$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

Řešení: $t_1 \cdot (ax^2 - 4x - 1) + t_2 \cdot (4x^2 - 6x - 3) + t_3 \cdot (x^2 + x - a) = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ a & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 6 & 1+4a & 0 \\ 0 & 4-3a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 6 & 1+4a & 0 \\ 0 & 0 & 6a^2 - 13a + 2 & 0 \end{array}\right)$$

$a \neq 2 \wedge a \neq \frac{1}{6} \implies \text{LN} \implies \text{Báze}$

3.4.A3

Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$

a) generují vektorový prostor Q^n

b) jsou LN vektory v $\mathbb{R}_n[x]$

3.4.A3

Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$

a) generují vektorový prostor Q^n

b) jsou LN vektory v $\mathbb{R}_n[x]$

Řešení:

a) $n \leq 4$

b) $n \geq 3$

3.4.A3

Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$

a) generují vektorový prostor Q^n

b) jsou LN vektory v $\mathbb{R}_n[x]$

Řešení:

a) $n \leq 4$

b) $n \geq 3$

3.4.A8a)

U.p. podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^3$ takových, že $\dim W_1 = \dim W_2 \wedge W_1 \neq W_2$.

3.4.A3

Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$

a) generují vektorový prostor Q^n

b) jsou LN vektory v $\mathbb{R}_n[x]$

Řešení:

a) $n \leq 4$

b) $n \geq 3$

3.4.A8a)

U.p. podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^3$ takových, že $\dim W_1 = \dim W_2 \wedge W_1 \neq W_2$.

Řešení: $W_1 = L((1,0,0))$, $W_2 = L((0,1,0))$

3.4.A9

U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ takových, že jejich součet je přímý.

3.4.A9

U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ takových, že jejich součet je přímý.

Řešení:

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = \dim \mathbb{R}^5$$

3.4.A9

U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ takových, že jejich součet je přímý.

Řešení:

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = \dim \mathbb{R}^5 \Longrightarrow 3 + 3 - 1 = 5$$

3.4.A9

U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ takových, že jejich součet je přímý.

Řešení:

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = \dim \mathbb{R}^5 \Longrightarrow 3 + 3 - 1 = 5$$

3.4.A10a)

U.p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná pro to, aby dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ byly bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

3.4.A9

U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ takových, že jejich součet je přímý.

Řešení:

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = \dim \mathbb{R}^5 \Longrightarrow 3 + 3 - 1 = 5$$

3.4.A10a)

U.p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná pro to, aby dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ byly bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

$$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$$