Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

25.3.–26.3.2020

Proč vlastně determinant?

– charakterizace matic

Proč vlastně determinant?

– charakterizace matic
– souvislosti s rovnicemi a nová cesta k jejich řešení

Proč vlastně determinant?

- charakterizace matic
- souvislosti s rovnicemi a nová cesta k jejich řešení
- vlastní čísla a vlastní vektory

Proč vlastně determinant?

- charakterizace matic
- souvislosti s rovnicemi a nová cesta k jejich řešení
- vlastní čísla a vlastní vektory
- analýza

Proč vlastně determinant?

- charakterizace matic
- souvislosti s rovnicemi a nová cesta k jejich řešení
- vlastní čísla a vlastní vektory
- analýza
- determinant má geometrický význam!

$$V_n = |\det A| \qquad \text{(objem rovnoběžnostěnu)}$$

Proč vlastně determinant?

- charakterizace matic
- souvislosti s rovnicemi a nová cesta k jejich řešení
- vlastní čísla a vlastní vektory
- analýza
- determinant má geometrický význam!

$$V_n = |\det A| \qquad \text{(objem rovnoběžnostěnu)}$$

- při hledání křivky, která prochází danými body

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

4.2.B7 d)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

4.2.B7 d)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

4.2.B7 d)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 16 - 24 + 24 - 1 = -4$$

4.2.B11 a)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

4.2.B11 a)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

4.2.B11 a)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

4.2.B11 a)

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 105 + 16 - 140 - 10 + 24 = -195$$

4.2.B9 a)

Nechť je dána matice

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Spočtěte minor $|B|$, jeho doplněk a algebraický doplněk, jestliže submatice B je vytvořena 1. a 3. řádkem a 2. a 3. sloupcem.

Řešení:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

4.2.B9 a)

Nechť je dána matice

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Spočtěte minor $|B|$, jeho doplněk a algebraický doplněk, jestliže submatice B je vytvořena 1. a 3. řádkem a 2. a 3. sloupcem.

Řešení:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad |\bar{B}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

4.2.B9 a)

Nechť je dána matice

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Spočtěte minor $|B|$, jeho doplněk a algebraický doplněk, jestliže submatice B je vytvořena 1. a 3. řádkem a 2. a 3. sloupcem.

Řešení:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad |\bar{B}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$(-1)^{1+3+2+3} \cdot |\bar{B}| = -8$$

4.2.B12 a)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4.2.B12 a)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+5+6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

4.2.B12 a)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+5+6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

4.2.B12 a)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+5+6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) = -105$$

4.2.B18 b)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$$

4.2.B18 b)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n-2 & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

4.2.B18 b)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n-2 & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$$

4.2.B20 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

4.2.B20 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot (-1)^2 \cdot |A_{n-1}| + 5 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

4.2.B20 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot (-1)^2 \cdot |A_{n-1}| + 5 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_1| = \frac{1}{3}\left(5^2 - 2^2\right) = 7, \qquad |A_2| = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = 39$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_1| = \frac{1}{3}\left(5^2 - 2^2\right) = 7, \qquad |A_2| = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = 39$$

$$|A_n| \;=\; 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}| =$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_1| = \frac{1}{3}\left(5^2 - 2^2\right) = 7, \qquad |A_2| = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = 39$$

$$|A_n| \;\; = \;\; 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}| = \frac{7}{3}\left(5^n - 2^n\right) - \frac{10}{3}\left(5^{n-1} - 2^{n-1}\right) =$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_1| = \frac{1}{3}\left(5^2 - 2^2\right) = 7, \qquad |A_2| = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = 39$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}| = \frac{7}{3}\left(5^n - 2^n\right) - \frac{10}{3}\left(5^{n-1} - 2^{n-1}\right) = \\ &= \frac{7}{3} \cdot 5^n - \frac{7}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot 5^n + \frac{5}{3} \cdot 2^n \end{aligned}$$

$$|A_n| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \qquad |A_n| = 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |7| = 7, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$|A_1| = \frac{1}{3}\left(5^2 - 2^2\right) = 7, \qquad |A_2| = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = 39$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= 7 \cdot |A_{n-1}| - 10 \cdot |A_{n-2}| = \frac{7}{3}\left(5^n - 2^n\right) - \frac{10}{3}\left(5^{n-1} - 2^{n-1}\right) = \\ &= \frac{7}{3} \cdot 5^n - \frac{7}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot 5^n + \frac{5}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \end{aligned}$$

4.2.B23 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \cos nx$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

4.2.B23 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \cos nx$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \cdot 2\cos x |A_{n-1}| + 1 \cdot (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

4.2.B23 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \cos nx$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \cdot 2\cos x |A_{n-1}| + 1 \cdot (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - (-1)^{n-1+n-1} \cdot 1 \cdot |A_{n-2}| =$$

4.2.B23 b)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_n| = \cos nx$, kde A_n je daná matice.

Řešení:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \cdot 2\cos x |A_{n-1}| + 1 \cdot (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 2\cos x & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - (-1)^{n-1+n-1} \cdot 1 \cdot |A_{n-2}| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |\cos x| = \cos x, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |\cos x| = \cos x, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$|A_n| = 2\cos x |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |\cos x| = \cos x, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$|A_n| = 2\cos x |A_{n-1}| - |A_{n-2}| = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x =$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |\cos x| = \cos x, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= 2\cos x |A_{n-1}| - |A_{n-2}| = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x = \\ &= 2\cos x(\cos nx \cos x + \sin nx \sin x) - \cos nx \cos 2x - \sin nx \sin 2x = \end{aligned}$$

$$|A_n| = \cos nx \qquad |A_n| = 2\cos x \cdot |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|A_1| = |\cos x| = \cos x, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= 2\cos x |A_{n-1}| - |A_{n-2}| = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x = \\ &= 2\cos x(\cos nx \cos x + \sin nx \sin x) - \cos nx \cos 2x - \sin nx \sin 2x = \\ &= \cos nx(2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x) = \cos nx \end{aligned}$$

4.2.B18 c)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

4.2.B18 c)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

4.2.B18 c)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2n+1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

4.2.B18 c)

Vypočtěte determinant.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2n+1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

4.2.B22

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_{n+1}| = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde A_{n+1} je daná matice.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

4.2.B22

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_{n+1}| = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde A_{n+1} je daná matice.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot a_n \cdot \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^3 \cdot |A_n|$$

4.2.B22

Dokažte, že pro každé přirozené n platí $|A_{n+1}| = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde A_{n+1} je daná matice.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot a_n \cdot \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^3 \cdot |A_n| = a_n x^n + |A_n|$$

Domácí úkol

Vypočtěte následující determinanty (řádů 3,4 a n)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

Termín odevzdání je 5.4.2020 včetně