Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

1.4.–2.4.2020

4.3.B1a)

Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.3.B1a)

Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

4.3.B1a)

Pro dané matice spočtěte $A\cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 7\cdot 11 & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 & 2\cdot 7 + 5\cdot 1 + 7\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 2 & -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 11 & -1\cdot 1 + 0\cdot 6 + 4\cdot 1 & -1\cdot 7 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

4.3.B1a)

Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 7\cdot 11 & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 & 2\cdot 7 + 5\cdot 1 + 7\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 2 & -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 11 & -1\cdot 1 + 0\cdot 6 + 4\cdot 1 & -1\cdot 7 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

Proč se to dělá zrovna takto?

Lineární zobrazení

Zobrazení T z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je pravidlo, které každému vektoru z $\mathbb{R}^n$ přiřadí právě jeden vektor z $\mathbb{R}^m$. Zobrazení T navíc nazveme lineární, jestliže

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{a} \qquad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Proč se to dělá zrovna takto?

Lineární zobrazení

Zobrazení T z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je pravidlo, které každému vektoru z $\mathbb{R}^n$ přiřadí právě jeden vektor z $\mathbb{R}^m$. Zobrazení T navíc nazveme lineární, jestliže

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{a} \qquad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Příklady

Zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které

- zobrazí každý bod v osové souměrnosti s osou x
- každý bod kolmo promítne na osu x
- každý bod otočí kolem počátku protisměru hodinových ručiček o úhel φ

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}\qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aA + bC)x_1 + (aB + bD)x_2 \\ (cA + dC)x_1 + (cB + dD)x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}\qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

$$f\left(g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(aA+bC)x_1+(aB+bD)x_2\\(cA+dC)x_1+(cB+dD)x_2\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}aA+bC&aB+bD\\cA+dC&cB+dD\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}\qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

$$f\left(g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(aA+bC)x_1+(aB+bD)x_2\\(cA+dC)x_1+(cB+dD)x_2\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}aA+bC&aB+bD\\cA+dC&cB+dD\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aA+bC&aB+bD\\cA+dC&cB+dD\end{pmatrix}$$

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Řešení: 1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Řešení: 1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

2. Předpokládáme, že vztah platí pro $1, 2, \ldots n-1$ a dokážeme, že platí pro n.

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n =$$

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Řešení: 1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

2. Předpokládáme, že vztah platí pro $1, 2, \ldots n-1$ a dokážeme, že platí pro n.

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{n-1} =$$

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Řešení: 1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

2. Předpokládáme, že vztah platí pro $1, 2, \dots n-1$ a dokážeme, že platí pro n.

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{n-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n-1)x & -\sin(n-1)x \\ \sin(n-1)x & \cos(n-1)x \end{pmatrix} =$$

4.3.B4a)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Řešení: 1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

2. Předpokládáme, že vztah platí pro $1, 2, \dots n-1$ a dokážeme, že platí pro n.

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{n-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n-1)x & -\sin(n-1)x \\ \sin(n-1)x & \cos(n-1)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in M$$

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in M$$

2. Je $(M, \cdot)$ pologrupa s jedničkou?

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in M$$

2. Je $(M, \cdot)$ pologrupa s jedničkou?
Jednička je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. Násobení matic je asociativní (V 3.3.)

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in M$$

2. Je $(M, \cdot)$ pologrupa s jedničkou?
Jednička je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. Násobení matic je asociativní (V 3.3.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

4.3.B20b)

Dokažte, že množina matic

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

společně s operacemi sčítání a násobené matic je tělesem.

Řešení: 1. Je $(M, +)$ komutativní grupa?
Matice se sčítáním tvoří komutativní grupu (V 3.1.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in M$$

2. Je $(M, \cdot)$ pologrupa s jedničkou?
Jednička je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. Násobení matic je asociativní (V 3.3.)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix} \in M$$

3. Platí distributivní zákony?

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

4. Jedná se o netriviální komutativní okruh?

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

4. Jedná se o netriviální komutativní okruh?

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

4. Jedná se o netriviální komutativní okruh?

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

5. Existuje ke každému nenulovému prvku prvek inverzní?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

4. Jedná se o netriviální komutativní okruh?

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

5. Existuje ke každému nenulovému prvku prvek inverzní?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-2b^2} & \frac{-b}{a^2-2b^2} \\ \frac{-2b}{a^2-2b^2} & \frac{a}{a^2-2b^2} \end{pmatrix} \in M$$

3. Platí distributivní zákony?
Ano (V 3.4.)

4. Jedná se o netriviální komutativní okruh?

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix}$$

5. Existuje ke každému nenulovému prvku prvek inverzní?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-2b^2} & \frac{-b}{a^2-2b^2} \\ \frac{-2b}{a^2-2b^2} & \frac{a}{a^2-2b^2} \end{pmatrix} \in M$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2 \neq 0 \Longrightarrow \quad \text{existuje prvek inverzní}$$

4.3.B24a)

Rozhodněte, zda dané matice tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3.B24a)

Rozhodněte, zda dané matice tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.B24a)

Rozhodněte, zda dané matice tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
t_1 \phantom{{}+2t_2} + t_3 + t_4 &= 0 \\
t_2 + 2t_3 + t_4 &= 0 \\
t_1 + 2t_2 + 3t_3 \phantom{{}+t_4} &= 0 \\
t_1 + 3t_2 \phantom{{}+3t_3} + 2t_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

Existuje jedno řešení $\Longrightarrow$ LN $\Longrightarrow$ Báze

4.3.B25a)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

4.3.B25a)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zřejmě $\forall\, A, B \in W$ máme $A + B \in W$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ máme $(c \cdot A) \in W \implies W$ je podprostor

4.3.B25a)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zřejmě $\forall\, A,\ B \in W$ máme $A + B \in W$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ máme $(c \cdot A) \in W \Longrightarrow W$ je podprostor

$$\dim W = n$$

4.3.B25d)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

4.3.B25d)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Zřejmě $\forall\, A,\, B \in W$ máme $A + B \in W$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ máme $(c \cdot A) \in W \implies W$ je podprostor

4.3.B25d)

Rozhodněte, zda

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \,|\, a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, případně určete jeho dimenzi.

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Zřejmě $\forall\, A, B \in W$ máme $A + B \in W$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ máme $(c \cdot A) \in W \implies$ W je podprostor

$$\dim W = n^2 - 1$$

4.3.A5

U.p. dvou regulárních matic A, B, které jsou děliteli nuly v okruhu $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

4.3.A5

U.p. dvou regulárních matic A, B, které jsou děliteli nuly v okruhu $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Řešení: Pokud by matice nemuseli být regulární, tak pak by správná odpoveď byla například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.A5

U.p. dvou regulárních matic A, B, které jsou děliteli nuly v okruhu $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Řešení: Pokud by matice nemuseli být regulární, tak pak by správná odpoveď byla například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V našem případě, ale žádný takový příklad neexistuje, jelikož Cauchyova věta říka, že

$$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|.$$

A matice A a B mají být regulární, tj. $|A| \neq 0$ a $|B| \neq 0$, ale $A \cdot B$ má být nulová matice, pro kterou platí $|A \cdot B| = 0$.

4.3.A4

U.p. generátorů vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$, které nejsou bází tohoto prostoru.

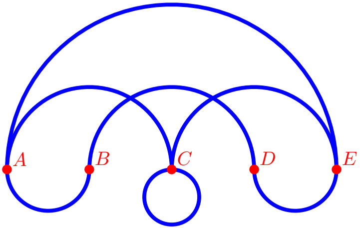
4.3.A4

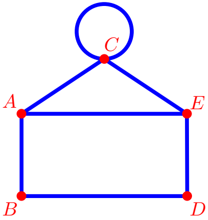
U.p. generátorů vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$, které nejsou bází tohoto prostoru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Některé aplikace matic

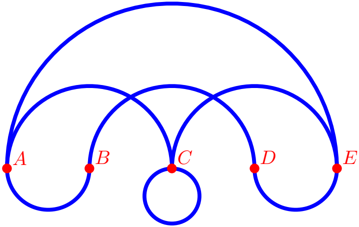
Grafem rozumíme konečnou množinu bodů (těm říkáme vrcholy) a konečnou množinu hran, kdy každá z nich spojuje dva vrcholy (ne nutně různé).

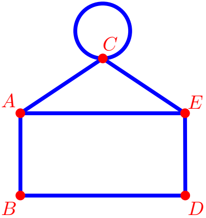




Stejný graf můžeme ale také popsat pomocí tzv. *matice sousednosti*. Pro graf o n vrcholech se jedná o čtvercovou matici $n \times n$ definovanou takto

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana mezi vrcholy } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$





Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cestou v grafu rozumíme posloupnost hran, která nám umožní cestovat z jednoho vrcholu do jiného. Její délka je pak číslo určující počet hran, které obsahuje.

Uvažme matici

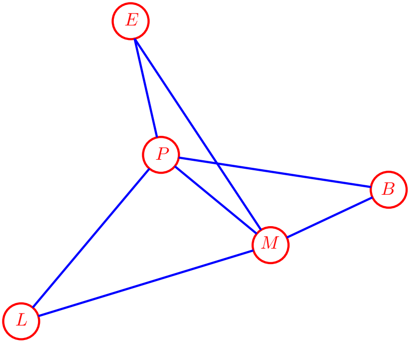
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Co reprezentují čísla v této matici? Z definice násobení matic víme, že

$$\left(A^2\right)_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53}\,.$$

Tento výraz bude nenulový, když alespoň jeden ze součinů $a_{1k}a_{k3}$ bude nenulový, což ale nastane jen tehdy, když oba členy a_{1k} i a_{k3} budou nenulové. To ale znamená, že existuje hrana mezi prvním a k-tým vrcholem a taky hrana mezi k-tým a třetím vrcholem, tedy existuje cesta délky 2, která spojuje první a třetí vrchol.

Tyto myšlenky můžeme ilustrovat na celé řadě příkladů. Uvažme například následující graf a příslušnou matici sousednosti, které zobrazují přímé letecké spoje mezi Brnem, Edinburghem, Lisabonem, Mnichovem a Paříží.



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} B & E & L & M & P \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ E \\ L \\ M \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nyní můžeme například snadno odpovědět na otázku, kolik existuje různých letů z Brna do libovolného města s dvěma přestupy:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 9 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Nyní můžeme například snadno odpovědět na otázku, kolik existuje různých letů z Brna do libovolného města s dvěma přestupy:

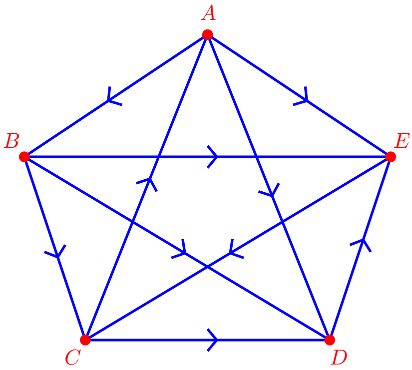
$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 9 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Odpověď dává první řádek naší matice. Vidíme, že například z Brna do Edinburghu existují čtyři různé cesty s dvěma přestupy a do Paříže je jich už devět. Která z těchto cest by byla nejkratší nebo nejrychlejší je již ale jiný příběh (i když stále z teorie grafů).

V mnoha aplikacích není vztah mezi dvěma objekty obousměrný. Například hrany reprezentující jednosměrnou cestu v grafu popisujícím dopravní síť, nebo vztahy mezi jednotlivými druhy v rámci ekosystému. Snaha o zachycení těchto vztahů nás vede k tzv. *orientovanému grafu*, kde máme orientované hrany (tj. šipky). Pro něj můžeme samozřejmě opět zavést matici sousednosti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vede-li hrana z } i \text{ do } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Představme si například pětici hráčů, kteří hrají turnaj ve stylu každý s každým. Výsledky můžeme snadno zachytit pomocí grafu, kdy hranu od prvního hráče k druhému vedeme tehdy, když první druhého porazí. Dostaneme tak například následující graf a příslušnou matici sousednosti



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dejme tomu, že chceme seřadit hráče podle počtu jejich vítězství. Pro tento účel nám stačí samozřejmě jen sečíst, kolik jedniček je v každém řádku. Tento výpočet můžeme také nahradit následujícím násobením:

$$A \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že někteří hráči (A a B, C a D) mají stejný počet výher. Pokud bychom chtěli rozhodnout, který z nich je lepší, můžeme například použít kritérium nepřímých vítězství, tj. kolik hráčů porazili hráči, které daný hráč porazil. Ve slovech matic (po předchozím příkladu je snad jasné proč) dostaneme

$$(A + A^2) \cdot J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hráč A je tedy lepší než B a E je lepší než D. Poznamenejme, že naneštěstí tento přístup neumí rozhodnout všechny „remízy“.

Domácí úkol – termín odevzdání 10.4.2020

První příklad

U. p. matic A, B, které nejsou čtvercové a přitom existují oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Druhý příklad

Spočtěte $A \cdot B \cdot C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí příklad

Rozhodněte, zda dané matice tvoří bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$