Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

8.4.–9.4.2020

4.4.B1a)

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

4.4.B1a)

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \end{pmatrix}$$

4.4.B1a)

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 2$$

4.4.B4a)

Určete hodnost dané matice v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.B4a)

Určete hodnost dané matice v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & -21 & 12+a & b-2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (a+5)(a-3) & (b-2)(a-10) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (a+5)(a-3) & (b-2)(a-10) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (a+5)(a-3) & (b-2)(a-10) \end{pmatrix}$$

1. $a = 3$ a $b = 2$ nebo $a = -5$ a $b = 2$

$$h(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (a+5)(a-3) & (b-2)(a-10) \end{pmatrix}$$

1. $a = 3$ a $b = 2$ nebo $a = -5$ a $b = 2$

$$h(A) = 2$$

2. jinak

$$h(A) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & a-10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & (a+5)(a-3) & (b-2)(a-10) \end{pmatrix}$$

1. $a = 3$ a $b = 2$ nebo $a = -5$ a $b = 2$

$$h(A) = 2$$

2. jinak

$$h(A) = 3$$

$a = 10$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.A2

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbb{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

4.4.A2

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbb{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $4 \leq h(A) \leq 6$

4.4.A2

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbb{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $4 \leq h(A) \leq 6$

4.4.A4

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbb{Q})$ existují nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2, 4 a 6. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

4.4.A2

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbb{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $4 \leq h(A) \leq 6$

4.4.A4

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbb{Q})$ existují nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2, 4 a 6. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $5 \leq h(A) \leq 8$

4.4.A2

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbb{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $4 \leq h(A) \leq 6$

4.4.A4

Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbb{Q})$ existují nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2, 4 a 6. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $5 \leq h(A) \leq 8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.B11 b)

K dané matici A nalezněte inverzní matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4.4.B11 b)

K dané matici A nalezněte inverzní matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 6 & 0 & -15 & 10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & -15 & 10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 36 & -20 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B$$

Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot$$

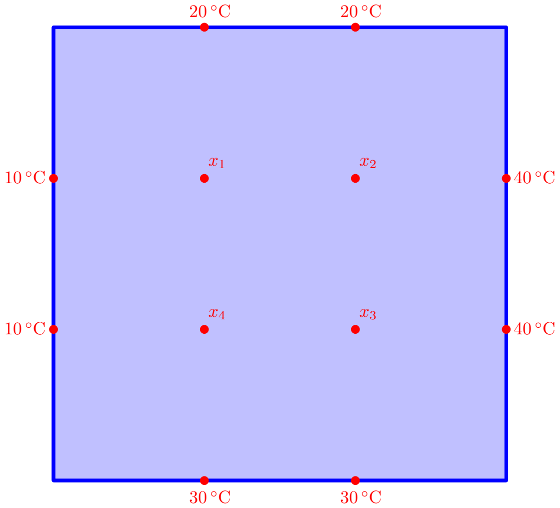
Proč, k čemu, jak?

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vedení tepla



$$x_1 = \frac{1}{4}(30 + x_2 + x_4)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(60 + x_1 + x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{4}(70 + x_2 + x_4)$$
$$x_4 = \frac{1}{4}(40 + x_1 + x_3)$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

$$A \cdot X = B$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

$$A \cdot X = B$$

$$(D + T) \cdot X = B$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

$$A \cdot X = B$$

$$(D + T) \cdot X = B$$

$$D \cdot X = B - T \cdot X$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

$$A \cdot X = B$$

$$(D + T) \cdot X = B$$

$$D \cdot X = B - T \cdot X$$

$$X = D^{-1} \cdot (B - T \cdot X)$$

Jacobiho metoda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T$$

$$A \cdot X = B$$

$$(D + T) \cdot X = B$$

$$D \cdot X = B - T \cdot X$$

$$X = D^{-1} \cdot (B - T \cdot X)$$

$$X_{k+1} = D^{-1} \cdot (B - T \cdot X_k)$$

4.4.A7

U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

4.4.A7

U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.A7

U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.A10 a), b)

U. p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná (je dostatečná, ale není nutná) pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ existovala matice inverzní.

4.4.A7

U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.A10 a), b)

U. p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná (je dostatečná, ale není nutná) pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ existovala matice inverzní.

Řešení: N, ale ne D: všechny řádky jsou nenulové

4.4.A7

U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.A10 a), b)

U. p. podmínky, která je nutná, ale není dostatečná (je dostatečná, ale není nutná) pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ existovala matice inverzní.

Řešení: N, ale ne D: všechny řádky jsou nenulové
D, ale ne N: A je jednotková matice řádu n

4.4.B14

Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\iff |A| = \pm 1$.

4.4.B14

Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\Longleftrightarrow |A| = \pm 1$.

Řešení: „$\Longleftarrow$“

4.4.B14

Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\iff |A| = \pm 1$.

Řešení: „$\Longleftarrow$“ Plyne ze vztahu

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\star},$$

jelikož $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.

4.4.B14

Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\iff |A| = \pm 1$.

Řešení: „$\Longleftarrow$“ Plyne ze vztahu

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\star},$$

jelikož $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.
„$\Longrightarrow$“ Plyne z Cauchyovy věty

$$1 = |E_n| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|,$$

jelikož $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$.

Domácí úkol

Příklad 1

Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2

K dané matici nalezněte inverzní matici (libovolnou metodou)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Termín odevzdání 17.4.2020