Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

15.4.–16.4.2020

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

Řešení:

$$W_1:$$

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, W_1+W_2, $W_1\cap W_2$.

Řešení:

$$W_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

Řešení:

$$W_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim W_1 = 2$$

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, W_1+W_2, $W_1 \cap W_2$.

Řešení:

$$W_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim W_1 = 2$$

$W_2:$

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

Řešení:

$$W_1\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim W_1 = 2$$

$$W_2\colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.4.B17a)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory

$$W_1 = L\left((1,2,2),(2,3,-1),(1,1,-3)\right),$$

$$W_2 = L\left((0,1,2),(1,1,-1),(1,3,3)\right).$$

Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

Řešení:

$$W_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \implies \dim W_1 = 2$$

$$W_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim W_2 = 2$$

$W_1 + W_2$:

$$W_1 + W_2\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W_1 + W_2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \dim (W_1 + W_2) = 3$$

$$W_1 + W_2\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \dim\left(W_1 + W_2\right) = 3$$

$$\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 + W_2\right) = 1$$

$$\vec{x} \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow \vec{x} = t_1 \cdot (1,2,2) + t_2 \cdot (0,-1,-5) = t_3 \cdot (1,1,-1) + t_4 \cdot (0,1,2)$$

$$\vec{x} \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow \vec{x} = t_1 \cdot (1, 2, 2) + t_2 \cdot (0, -1, -5) = t_3 \cdot (1, 1, -1) + t_4 \cdot (0, 1, 2)$$

$$t_1 \cdot (1, 2, 2) + t_2 \cdot (0, -1, -5) - t_3 \cdot (1, 1, -1) - t_4 \cdot (0, 1, 2) = \vec{o}$$

$$\vec{x} \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow \vec{x} = t_1 \cdot (1,2,2) + t_2 \cdot (0,-1,-5) = t_3 \cdot (1,1,-1) + t_4 \cdot (0,1,2)$$

$$t_1 \cdot (1,2,2) + t_2 \cdot (0,-1,-5) - t_3 \cdot (1,1,-1) - t_4 \cdot (0,1,2) = \vec{o}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{x} \in W_1 \cap W_2 \implies \vec{x} = t_1 \cdot (1,2,2) + t_2 \cdot (0,-1,-5) = t_3 \cdot (1,1,-1) + t_4 \cdot (0,1,2)$$

$$t_1 \cdot (1,2,2) + t_2 \cdot (0,-1,-5) - t_3 \cdot (1,1,-1) - t_4 \cdot (0,1,2) = \vec{o}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$(3s, s, 3s, 2s),\ s \in \mathbb{R} \quad \implies \quad$ např. $\quad t_1 = 3 \quad$ a $\quad t_2 = 1$

$$\implies W_1 \cap W_2 = L((3,5,1))$$

4.4.A9

U.p. bází (1) a (2) vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ tak, že maticí přechodu od báze (1) k bázi (2) je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.4.A9

U.p. bází (1) a (2) vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ tak, že maticí přechodu od báze (1) k bázi (2) je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Neexistuje (matice přechodu musí být regulární).

4.4.B20b)

Nalezněte matici přechodu od báze $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$, $u_3 = (-2, 3, 2)$ k bázi $v_1 = (-5, 9, 2)$, $v_2 = (6, -10, 5)$, $v_3 = (-1, 2, 9)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

4.4.B20b)

Nalezněte matici přechodu od báze $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (2,-1,3)$, $u_3 = (-2,3,2)$ k bázi $v_1 = (-5,9,2)$, $v_2 = (6,-10,5)$, $v_3 = (-1,2,9)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

$$\vec{v_1} = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + a_{31}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_2} = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{32}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_3} = a_{13}\vec{u}_1 + a_{23}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3$$

4.4.B20b)

Nalezněte matici přechodu od báze $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (2,-1,3)$, $u_3 = (-2,3,2)$ k bázi $v_1 = (-5,9,2)$, $v_2 = (6,-10,5)$, $v_3 = (-1,2,9)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

$$\vec{v_1} = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + a_{31}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_2} = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{32}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_3} = a_{13}\vec{u}_1 + a_{23}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3$$

$$(-5,9,2) = a_{11}(1,2,1) + a_{21}(2,-1,3) + a_{31}(-2,3,2)$$
$$(6,-10,5) = a_{12}(1,2,1) + a_{22}(2,-1,3) + a_{32}(-2,3,2)$$
$$(-1,2,9) = a_{13}(1,2,1) + a_{23}(2,-1,3) + a_{33}(-2,3,2)$$

4.4.B20b)

Nalezněte matici přechodu od báze $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (2,-1,3)$, $u_3 = (-2,3,2)$ k bázi $v_1 = (-5,9,2)$, $v_2 = (6,-10,5)$, $v_3 = (-1,2,9)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

$$\vec{v_1} = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + a_{31}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_2} = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{32}\vec{u}_3$$
$$\vec{v_3} = a_{13}\vec{u}_1 + a_{23}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3$$

$$(-5,9,2) = a_{11}(1,2,1) + a_{21}(2,-1,3) + a_{31}(-2,3,2)$$
$$(6,-10,5) = a_{12}(1,2,1) + a_{22}(2,-1,3) + a_{32}(-2,3,2)$$
$$(-1,2,9) = a_{13}(1,2,1) + a_{23}(2,-1,3) + a_{33}(-2,3,2)$$

$$-5 = 1a_{11} + 2a_{21} - 2a_{31}$$
$$9 = 2a_{11} - 1a_{21} + 3a_{31}$$
$$2 = 1a_{11} + 3a_{21} + 2a_{31}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & 54 & -27 & 54 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & 54 & -27 & 54 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & 27 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & 54 & -27 & 54 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & 27 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.2.A2

U.p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých, která má právě jedno řešení.

5.2.A2

U.p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých, která má právě jedno řešení.

Řešení: Neexistuje

5.2.A2

U.p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých, která má právě jedno řešení.

Řešení: Neexistuje (hodnost je nejvíce 3, neznáme jsou 4, má-li řešení, pak nekonečně mnoho).

5.2.A3

U.p. soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých, která má právě jedno řešení.

Řešení:

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 1 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5.2.A5

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny jako volné neznámé.

5.2.A5

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny jako volné neznámé.

Řešení:

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ 2x_4 &= 2 \\ 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

5.2.A5

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny jako volné neznámé.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 1\\
2x_4 &= 2\\
3x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

5.2.A6

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

5.2.A5

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny jako volné neznámé.

Řešení:

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ 2x_4 &= 2 \\ 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

5.2.A6

U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

Řešení:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & +\,x_3 & & = 0 \\ & x_2 & & & = 0 \\ & & & x_4 & = 0 \end{array}$$

5.2.A8

Je dána soustava 4 lin. rovnic o 3 neznámých, jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Co všechno můžete říci o počtu řešení?

5.2.A8

Je dána soustava 4 lin. rovnic o 3 neznámých, jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Co všechno můžete říci o počtu řešení?

Řešení: Soustava je neřešitelná.

5.2.A8

Je dána soustava 4 lin. rovnic o 3 neznámých, jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Co všechno můžete říci o počtu řešení?

Řešení: Soustava je neřešitelná.

5.2.B2 a)

V závislosti na parametru a rozhodněte o řešitelnosti, resp. počtu řešení soustavy (nad $\mathbb{R}$), která je zadána rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2+a-2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3)(a-1) & a-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2+a-2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3)(a-1) & a-1 \end{array}\right)$$

$a = -3 \implies$ žádné řešení

$a = 1 \implies$ nekonečně mnoho řešení, tři parametry

$a \neq -3, 1 \implies$ 1 řešení

5.2.B12

Je dána soustava lin. rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 \quad\quad\quad &= c \\ cx_1 \quad\quad\quad + bx_3 &= a \\ cx_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

přičemž platí, že tato soustava má jediné řešení. Dokažte, že $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, a pomocí Cramerova pravidla toto řešení najděte.

5.2.B12

Je dána soustava lin. rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c \\ cx_1 + bx_3 &= a \\ cx_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

přičemž platí, že tato soustava má jediné řešení. Dokažte, že $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, a pomocí Cramerova pravidla toto řešení najděte.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = -2abc$$

5.2.B12

Je dána soustava lin. rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 \quad\quad\quad &= c \\ cx_1 \quad\quad\quad + bx_3 &= a \\ cx_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

přičemž platí, že tato soustava má jediné řešení. Dokažte, že $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, a pomocí Cramerova pravidla toto řešení najděte.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = -2abc \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ a & 0 & b \\ b & c & a \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ c & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Domácí úkol – termín 24.4.2020

První (a jediný) příklad

4.4.B17 f)