Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.4.–30.4.2020

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$,

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$, pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2$$

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme
$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2,$ pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow 0 = 10p - 10 \Longrightarrow p = 1.$$

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$, pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow 0 = 10p - 10 \Longrightarrow p = 1.$$

Máme tedy $\vec{e}_2 = (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2)$.

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$, pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow 0 = 10p - 10 \Longrightarrow p = 1.$$

Máme tedy $\vec{e}_2 = (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2)$. Analogicky $\vec{e}_3 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3$.

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2,$ pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow 0 = 10p - 10 \Longrightarrow p = 1.$$

Máme tedy $\vec{e}_2 = (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2)$. Analogicky $\vec{e}_3 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3$.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3 \Longrightarrow 0 = 10p_1 + 30$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3 \Longrightarrow 0 = 26p_2 - 26$$

6.2.B7 a)

V e. p. $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = [u_1, u_2, u_3]$, kde $\vec{u}_1 = (1,2,2,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,1,-5,3)$, $\vec{u}_3 = (3,2,8,-7)$.

Řešení: Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1,2,2,-1)$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$, pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow 0 = 10p - 10 \Longrightarrow p = 1.$$

Máme tedy $\vec{e}_2 = (1,2,2,-1) + (1,1,-5,3) = (2,3,-3,2)$. Analogicky $\vec{e}_3 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3$.

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3 &\Longrightarrow 0 = 10p_1 + 30\\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3 &\Longrightarrow 0 = 26p_2 - 26\end{aligned}$$

Pak $p_1 = -3$ a $p_2 = 1$ a
$e_3 = -3 \cdot (1,2,2,-1) + (2,3,-3,2) + (3,2,8,-7) = (2,-1,-1,-2)$.

6.2.B8 c)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

naleznete nějakou ortogonální bázi.

6.2.B8 c)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

nalezněte nějakou ortogonální bázi.

Řešení: Báze je např. $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$. Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = 1.$$

6.2.B8 c)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

nalezněte nějakou ortogonální bázi.

Řešení: Báze je např. $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$. Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = 1.$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$,

6.2.B8 c)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

nalezněte nějakou ortogonální bázi.

Řešení: Báze je např. $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$. Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = 1.$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2,$ pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 = p \cdot \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = p + \frac{1}{2} \Longrightarrow p = -\frac{1}{2}$$

6.2.B8 c)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

nalezněte nějakou ortogonální bázi.

Řešení: Báze je např. $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$. Zvolíme

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = 1.$$

Položíme $\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2,$ pak

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = p \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 = p \cdot \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = p + \frac{1}{2} \Longrightarrow p = -\frac{1}{2}$$

a tedy

$$\vec{e}_2 = x - \frac{1}{2}.$$

$$\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3$$

$$0 = p_1 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x \Longrightarrow 0 = p_1 + \frac{1}{3} \Longrightarrow p_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3$$

$$0 = p_1 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x \Longrightarrow 0 = p_1 + \frac{1}{3} \Longrightarrow p_1 = -\frac{1}{3}$$

$$0 = p_2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 0 = \frac{1}{12}p_2 + \frac{1}{12} \Longrightarrow p_2 = -1$$

$$\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \vec{u}_3$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_3$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = p_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_3$$

$$0 = p_1 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x \Longrightarrow 0 = p_1 + \frac{1}{3} \Longrightarrow p_1 = -\frac{1}{3}$$

$$0 = p_2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 0 = \frac{1}{12}p_2 + \frac{1}{12} \Longrightarrow p_2 = -1$$

$$\vec{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot 1 - 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$“

$$\vec{x} \in W^{\perp}$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^\perp \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$“

$$\vec{x} \in W^\perp \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pro } \forall \vec{u} \in W$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$“

$$\vec{x} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pro } \forall \vec{u} \in W \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$“

$$\vec{x} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pro } \forall \vec{u} \in W \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k$$

„$\Longleftarrow$“

$$\vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k \quad \overset{V2.1.3}{\Longrightarrow} \quad \vec{x} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \vec{u}_i \right) \forall r_i \in \mathbb{R}$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \Longleftrightarrow \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$"

$$\vec{x} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pro } \forall \vec{u} \in W \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k$$

„$\Longleftarrow$"

$$\vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k \quad \overset{V2.1.3}{\Longrightarrow} \quad \vec{x} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \vec{u}_i \right) \forall r_i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \perp [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$$

6.2.B13

Nechť $W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\vec{x} \in W^{\perp} \iff \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k.$$

Řešení: Zřejmě platí.

„$\Longrightarrow$“

$$\vec{x} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pro } \forall \vec{u} \in W \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k$$

„$\Longleftarrow$“

$$\vec{x} \perp \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \perp \vec{u}_k \quad \stackrel{V2.1.3}{\Longrightarrow} \quad \vec{x} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \vec{u}_i \right) \forall r_i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \perp [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k] \quad \Longrightarrow \quad x \in W^{\perp}$$

6.2.B16 a)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor

$$W = \{(r+s+t, -r+t, r+s, -t, s+t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$.

6.2.B16 a)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor

$$W = \{(r+s+t, -r+t, r+s, -t, s+t) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$.

Řešení: Báze W je např. $\vec{u}_1 = (1,-1,1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,0,-1,1)$. Je-li $\vec{w} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in W^\perp$, pak

$$\vec{w} \perp \vec{u}_i \Longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u}_i = 0.$$

6.2.B16 a)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor

$$W = \{(r+s+t, -r+t, r+s, -t, s+t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$.

Řešení: Báze W je např. $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0, -1, 1)$. Je-li $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W^{\perp}$, pak

$$\vec{w} \perp \vec{u}_i \Longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u}_i = 0.$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 0 \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(s, -t, -s-t, s, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0), \vec{u}_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(s, -t, -s-t, s, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0), \vec{u}_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0)$$

$$\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(s, -t, -s-t, s, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0), \vec{u}_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0)$$

$$\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \quad / \cdot \vec{e}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(s, -t, -s-t, s, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0), \vec{u}_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, -1, 1, 0)$$

$$\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \quad / \cdot \vec{e}_1$$

$$0 = 3p + 1 \Longrightarrow p = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(s, -t, -s-t, s, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = (1,0,-1,1,0), \vec{u}_2 = (0,-1,-1,0,1)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 = (1,0,-1,1,0)$$

$$\vec{e}_2 = p \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \quad / \cdot \vec{e}_1$$

$$0 = 3p + 1 \Longrightarrow p = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W,\, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W,\, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = t_1 \cdot \vec{w}_1 + t_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{y}$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W,\, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = t_1 \cdot \vec{w}_1 + t_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{y} \quad / \cdot \vec{w}_1 \quad / \cdot \vec{w}_2$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W,\, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = t_1 \cdot \vec{w}_1 + t_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{y} \quad / \cdot \vec{w}_1 \quad / \cdot \vec{w}_2$$

$$8 = 7t_1 + 6t_2$$

$$1 = 6t_1 + 11t_2$$

6.2.B18 b)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $W = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$, $\vec{w}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{w}_2 = (3, 1, 0, 1)$, $\vec{w}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

Řešení:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{x} \in W, \vec{y} \in W^{\perp}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = t_1 \cdot \vec{w}_1 + t_2 \cdot \vec{w}_2 + \vec{y} \quad / \cdot \vec{w}_1 \quad / \cdot \vec{w}_2$$

$$8 = 7t_1 + 6t_2$$
$$1 = 6t_1 + 11t_2$$

$$t_1 = 2,\ t_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = 2 \cdot (1, 1, -1, 2) - (3, 1, 0, 1) = (-1, 1, -2, 3)$$

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

6.2.A8

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

6.2.A8

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

Řešení: Neexistuje.

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

6.2.A8

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

Řešení: Neexistuje.

6.2.A9

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby ortogonální projekcí vektoru $\vec{u} = (1,2,3,4)$ do podprostoru W byl nulový vektor.

6.2.A3

U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$

6.2.A7

U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

6.2.A8

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

Řešení: Neexistuje.

6.2.A9

U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby ortogonální projekcí vektoru $\vec{u} = (1,2,3,4)$ do podprostoru W byl nulový vektor.

Řešení: $W = L((3,1,1,-2))$

Domácí úkol - první část

První příklad

Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$ se skalárním součinem

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda-li vektory $\vec{f_1} = 2x$, $\vec{f_2} = 3x^2 - 1$, $\vec{f_3} = 3$ tvoří bázi, resp. ortogonální bázi, resp. ortonormální bázi tohoto euklidovského prostoru.

Druhý příklad

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory

$$\vec{u}_1 = (1, -2, 2, 1) \qquad \vec{u}_2 = (1, 3, 2, 1).$$

Ukažte, že jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$.

Domácí úkol - druhá část

Třetí příklad

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{u} = (3, -7, 8)$ do prostoru $W = L((1, 1, -2), (3, 1, -1))$.