Kvadratické rovnice 1 [1]

Definice. Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad \text{kde } a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Čísla a, b , c nazýváme koeficienty kvadratické rovnice, výrazy ax^2, bx a c nazýváme členy této rovnice, a to po řadě kvadratický, lineární a absolutní.

Odvození vzorce pro řešení kvadratické rovnice. Po vydělení rovnice nenulovým číslem a dostaneme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Její levou stranu upravíme pomocí doplnění na čtverec

$$\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Označíme-li $D = b^2 - 4ac$, můžeme psát

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{(2a)^2}\,.$$

Vzhledem k tomu, že levá strana této rovnice je nezáporná a jmenovatel pravé strany kladný, bude mít řešená kvadratická rovnice v $\mathbb{R}$ řešení právě tehdy, když $D \geq 0$. Dostáváme tedy tři případy:

1. Jestliže $D < 0$, rovnice v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení.
2. Pokud $D = 0$, platí
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}\,, \tag{1}$$
rovnice tedy má 1 (tzv. dvojnásobný) kořen.
3. Pro $D > 0$ po odmocnění, které je v této situaci ekvivalentní úpravou, obdržíme
$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{D}}{2a}\right| \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,, \tag{2}$$
což znamená, že řešením rovnice jsou dva různé kořeny.

Všimněte si, že odvozený vzorec (2) lze použít i v situaci, kdy $D = 0$, neboť vyjádření (1) je vlastně jeho speciálním případem.

Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazýváme *diskriminant* kvadratické rovnice.

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice (tzv. (Newton)-Viètovy vztahy).

Označme x_1 a x_2 kořeny uvažované kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tu můžeme vyřešit rovněž tak, že její levou stranu rozložíme na součin, tj.

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Po roznásobení tedy máme

$$ax^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c\,.$$

[1]Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu dostaneme

$$-a\,(x_1+x_2)=b \quad\Leftrightarrow\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

a

$$ax_1x_2=c \quad\Leftrightarrow\quad x_1x_2=\frac{c}{a}\,.$$

Uvedené vzorce sice nenahrazují vzorec (2), ale zato platí i v situaci, kdy $D<0$. Můžeme s nimi tedy počítat i v případě, že kořeny kvadratické rovnice nechceme či neumíme najít.

Rovnice - zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1. $$\sqrt{3}x^2-5x-2\sqrt{3}=0\,,$$
2. $$\sqrt{2}x^2-5x+\sqrt{8}=0\,,$$
3. $$\sqrt{3}x^2-\sqrt{8}x-\sqrt{12}=0\,,$$
4. $$\sqrt{2}x^4-2x^2-\sqrt{32}=0\,,$$
5. $$\sqrt{3}x^6+\sqrt{32}x^3-\sqrt{192}=0\,,$$
6. $$6x^2+7x-3=0\,,$$
7. $$4x^2+11x+6=0\,,$$
8. $$6x^2-19x+10=0\,,$$
9. $$4x^4-x^2-18=0\,,$$
10. $$8x^6-215x^3-27=0\,,$$
11. $$25x^2-30x+9=0\,,$$

12.
$$9x^2 + 42x + 49 = 0\,,$$
13.
$$9x^2 + 42x + 50 = 0\,,$$
14.
$$25x^2 - 9 = 0\,,$$
15.
$$-16x^2 + 81 = 0\,,$$
16.
$$2x^2 - 3x = 0\,,$$
17.
$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0\,,$$

Rovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

V úlohách 11. - 17. je výhodnější počítat bez užití vzorce (2).

1. $K = \left\{-1/\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right\}$,
2. $K = \left\{2\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right\}$,
3. $K = \left\{\sqrt{6}; -\sqrt{6}/3\right\}$,
4. užijte substituci $x^2 = y$, $K = \left\{\pm\sqrt[4]{8}\right\}$,
5. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \left\{\sqrt[6]{8/3}; -\sqrt[6]{24}\right\}$,
6. $K = \{1/3; -3/2\}$,
7. $K = \{-2; -3/4\}$,
8. $K = \{2/3; 5/2\}$,
9. užijte substituci $x^2 = y$, $K = \{\pm 3/2\}$,
10. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \{-1/2; 3\}$,
11. $K = \{3/5\}$,
12. $K = \{-7/3\}$,
13. $K = \emptyset$,
14. $K = \{\pm 3/5\}$,
15. $K = \{\pm 9/4\}$,
16. $K = \{0; 3/2\}$,
17. $K = \{0; -2\}$.

Užití Viètových vztahů - zadání úloh.

1. Následující výrazy vyjádřete ve tvaru, který obsahuje jen součty či součiny hodnot x_1 a x_2.

   a)
$$V_1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\,,$$

   b)
$$V_2 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1}\right)^{-2}\,,$$

   c)
$$V_3 = x_1^3 + x_2^3\,,$$

   d)
$$V_4 = \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2}\,.$$

2. Uvažujme rovnici $4x^2 - 11x + 5 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejíž kořeny jsou
   a) opačná čísla než kořeny uvažované rovnice,
   b) druhými mocninami kořenů uvažované rovnice,
   c) převrácenými hodnotami kořenů uvažované rovnice,
   d) čísla o 2 větší než kořeny uvažované rovnice,
   e) čísla 4 krát větší než kořeny uvažované rovnice.

3. Aniž řešíte rovnici $x^2 - x + 16 = 0$, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou (druhými) odmocninami kořenů zadané rovnice.

4. Označme x_1 a x_2 kořeny rovnice $x^2 + x + 2 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou čísla
$$\frac{1}{x_1^3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_2^3}\,.$$

Užití Viètových vztahů - návody k řešení a výsledky úloh.

1. Počítejme

   a)

$$V_1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2},$$

   b)

$$V_2 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^{-2} = \left(\frac{x_2 + x_1}{x_1x_2}\right)^{-2} = \frac{(x_1x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2},$$

   c)

$$V_3 = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3\right) - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2\,(x_1 + x_2)\ ,$$

   d)

$$V_4 = \sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + x_1 + 2\sqrt{1 + x_1}\sqrt{1 + x_2} + 1 + x_2} = \sqrt{2 + (x_1 + x_2) + 2\sqrt{1 + (x_1 + x_2) + x_1x_2}}\,.$$

2. Pro kořeny x_1 a x_2 rovnice $4x^2 - 11x + 5 = 0$ platí $x_1 + x_2 = \frac{11}{4}$ a $x_1x_2 = \frac{5}{4}$. Aby nedošlo k duplicitnímu značení hledejme rovnici ve tvaru $ay^2 + by + c = 0$.

   a) Má platit $y_1 = -x_1$ a $y_2 = -x_2$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -\frac{11}{4}$$

   a

$$y_1y_2 = \frac{c}{a} = -x_1 \cdot (-x_2) = x_1x_2 = \frac{5}{4}\,.$$

   Zvolíme-li $a = 4$, dopočteme $b = 11$ a $c = 5$. Jedna z vyhovujících rovnic je tedy tvaru $4y^2 + 11y + 5 = 0$.

   b) Např. $16y^2 - 81y + 25 = 0$,

   c) např. $5y^2 - 11y + 4 = 0$,

   d) např. $4y^2 - 27y + 43 = 0$,

   e) např. $y^2 - 11y + 20 = 0$,

3. Např. $y^2 - 3y + 4 = 0$.

4. Např. $8y^2 - 5y + 1 = 0$.