Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru [1]

Důležitá upozornění.

- Nezapomínejte na podmínky, které zajistí, aby žádný jmenovatel nemohl nabývat hodnoty 0.
- Dávejte pozor, abyste nerovnici nenásobili výrazem s neznámou, který může být pro nějaké hodnoty této neznámé kladný a pro jiné záporný.
- Všímejte si, zda je některý činitel kladný či nezáporný pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Výrazem, který je nezáporný, ale nemusí být kladný, nelze nerovnici (ani rovnici) dělit!
- V podílovém tvaru je potřebné najít a uvážit všechny nulové body příslušného výrazu. Studovanou nerovnici pak vyřešíme pomocí číselné osy a tabulky znamének.
- Základní myšlenka řešení je stejná jako v případě řešení rovnic či nerovnic v součinovém tvaru, kterými jsme se zabývali v předchozí kapitole.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice či nerovnice

a)

$$\frac{2x-3}{7-3x} > 0\,, \qquad \frac{4x-5}{3-2x} \le 0\,, \qquad \frac{3x-1}{x+4} < 0\,, \qquad \frac{3-2x}{4x-1} \ge 0\,, \qquad \frac{(4-x)\,(6+x)\,x}{7-x} \le 0\,,$$

b)

$$\frac{2-x}{x+5} \ge 1\,, \qquad \frac{x-7}{x-1} \le 9\,, \qquad \frac{2x+3}{3-x} \le 2\,, \qquad \frac{2x-1}{2x+1} \le 1\,, \qquad \frac{5x-6}{x+6} \le 1\,, \qquad \frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}\,,$$

c)

$$\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{x^3+8}{x^2+6x+8} > 0\,,$$

d)

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2-9} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{x^2+8x+15}{x^2-9} \le 0\,,$$

e)

$$\frac{4+x}{\left(3-\frac{x}{2}\right)^3 (7-2x)^5} \ge 0\,, \quad \frac{(x-1)^2}{(x+3)\,(x-2)} \ge 0\,, \quad \frac{(x+2)^3\,(3-x)\,x^2}{x+1} \le 0\,, \quad \frac{(2x-3)\,(x+3)^4}{(2-x)^2} \ge 0\,,$$

f)

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)\,(x-3)^2} \ge 0\,, \qquad \frac{(3x+1)^3\,(x^2-9x+18)}{x^2\,(1-x^2)\,(1+x)^4} \le 0\,,$$

g)

$$\frac{13x+16}{x^2-3x-10} < -2\,, \qquad \frac{x^3-x^2+x+5}{3-x} \le 3\,,$$

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

h)

$$\frac{\sqrt{x^2-8x+12}}{(x-2)^3} \leq 0\,, \qquad \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x^2-11x+24} > 0\,.$$

2. Určete definiční obory následujících výrazů

$$V_1 = \sqrt{\frac{3-4x}{3x-4} - 2}\,, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1} - 1} \qquad \text{a určete, kdy } V_1 \leq 0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Zkoumáme zvlášť znaménko čitatele a jmenovatele, pomocí čehož určíme znaménko příslušného podílu. Po řadě vychází $K = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$, $K = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right\rangle \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, $K = \left(-4; \frac{1}{3}\right)$, $K = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\rangle$, $K = \langle -6; 0\rangle \cup \langle 4; 7)$.

   b) Nerovnice je výhodné anulovat, tzn. přičíst k oběma jejím stranám číslo opačné k číslu na pravé straně. Dostaneme tak nerovnice ekvivalentní se zadanými po řadě

$$\frac{2x+3}{x+5} \leq 0\,, \quad \frac{4x-1}{x-1} \geq 0\,, \quad \frac{4x-3}{3-x} \leq 0\,, \quad \frac{2}{2x+1} \geq 0\,, \quad \frac{4x-12}{x+6} \leq 0\,, \quad \frac{x+5}{2x-10} > 0\,,$$

   které dále vyřešíme jako v první úloze. Po řadě vychází $K = \left(-5; -\frac{3}{2}\right\rangle$, $K = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right\rangle \cup (1; \infty)$, $K = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right\rangle \cup (3; \infty)$, $K = \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$, $K = (-6; 3\rangle$, $K = (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$.

   c) Upravme nejprve výraz na levých stranách

$$\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} = \frac{(x+2)\,(x^2-2x+4)}{(x+2)\,(x+4)}\,.$$

   Neboť $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$, je čitatel nulový právě tehdy, když $x = -2$. Tato hodnota ovšem s ohledem na tvar jmenovatele není přípustná. Zadaná rovnice tedy nemá řešení, $K = \emptyset$. Za podmínky $x \neq -2$ je proto zadaná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí

$$\frac{1}{x+4} > 0\,,$$

   takže platí $K = (-4; -2) \cup (-2; \infty)$.

   d) Zjednodušením levých stran dostaneme

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2-9} = \frac{(x+3)\,(x+5)}{(x-3)\,(x+3)} = \frac{x+5}{x-3}\,,$$

   přičemž tento výraz je definován právě pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}$. Uvažovaná rovnice tedy má právě jedno řešení, $K = \{-5\}$, pro množinu všech kořenů řešené nerovnice pak platí $K = \langle -5; -3) \cup (-3; 3)$.

   e) U nerovnic uvedených v tomto oddíle je třeba vzít v potaz exponenty. Rozmyslete si, že záleží na jejich paritě. Výraz umocněný na sudý exponent nemůže bý záporný (ale nulový ano), zatímco výraz umocněný na lichý exponent nabývá ve všech intervalech stejného znaménka jako jeho první mocnina (viz úvahy v předchozích úlohách). Po řadě vychází $K = \left\langle -4; \frac{7}{2}\right) \cup (6; \infty)$, $K = (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$, $K = \langle -2; -1) \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty)$, $K = \{-3\} \cup \left\langle \frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; \infty)$.

   f) V obou nerovnicích z tohoto oddílu je potřeba nejprve ještě některé výrazy rozkládat na součiny již dále nerozložitelných činitelů. Platí

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)\,(x-3)^2} = \frac{(x^2+4)\,(x-2)\,(x+2)}{(x+3)\,(x^2-3x+9)\,(x-3)^2}\,,$$

přičemž $x^2+4>0$ a $x^2-3x+9>0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)(x-3)^2} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-3)^2} \geq 0\,, \quad K=(-3;-2\rangle \cup \langle 2;3) \cup (3;\infty)\,.$$

Podobně pomocí úpravy

$$\frac{(3x+1)^3(x^2-9x+18)}{x^2(1-x^2)(1+x)^4} = \frac{(3x+1)^3(x-3)(x-6)}{x^2(1-x)(1+x)^5}$$

pro druhou nerovnici zjistíme, že $K=\left(-1;-\frac{1}{3}\right\rangle \cup (1;3\rangle \cup \langle 6;\infty)$.

g) Nerovnice je výhodné nejprve anulovat (viz postup v části 2.) a následně některé výrazy rozkládat na součiny již dále nerozložitelných činitelů (viz postup v části 6.). Vypočteme tak

$$\frac{13x+16}{x^2-3x-10} < -2 \quad \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+7x-4}{x^2-3x-10} < 0 \quad \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \quad \frac{(2x-1)(x+4)}{(x-5)(x+2)} < 0\,,$$

odkud $K=(-4;-2) \cup \left(\frac{1}{2};5\right)$. Podobně v případě druhé nerovnice dostaneme

$$\frac{x^3-x^2+x+5}{3-x} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \quad \frac{x^3-x^2+4x-4}{3-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \quad \frac{(x^2+4)(x-1)}{3-x} \leq 0\,.$$

Když si uvědomíme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x^2+4>0$, můžeme v ekvivalentních úpravách dále pokračovat

$$\frac{(x^2+4)(x-1)}{3-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{3-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-3} \geq 0\,, \quad \text{takže} \quad K=(-\infty;1\rangle \cup (3;\infty)\,.$$

h) Aby byl výraz $\sqrt{x^2-8x+12}$ definován, je nutné a stačí, aby $x^2-8x+12=(x-2)(x-6) \geq 0$. Dále ještě potřebujeme, aby ve jmenovateli zlomku nebyla nula. To nastane tehdy a jen tehdy, když $x \neq 2$. Definičním oborem zadané nerovnice je tedy množina $D=(-\infty;2) \cup \langle 6;\infty)$. Dále je z dosud uvedeného vidět, že zlomek na levé straně nerovnice je nulový právě, tehdy, když $x=6$, takže $6 \in K$. Další kořeny hledejme za podmínky, kdy $x \neq 6$. Pro všechna $x \in D-\{6\}=(-\infty;2) \cup (6;\infty)$ tedy platí

$$\frac{\sqrt{x^2-8x+12}}{(x-2)^3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x-2)^3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x-2)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<2\,.$$

Dohromady tak máme $K=(-\infty;2) \cup \{6\}$.
Pro druhou nerovnici pak platí

$$\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x^2-11x+24} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{(x-3)(x-8)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{|2x+1|}{(x-3)(x-8)} > 0\,.$$

Odtud je vidět, že definičním oborem nerovnice je množina $D=\mathbb{R}-\{3;8\}$ a dále, že zlomek na levé straně nerovnice je nulový právě tehdy, když $x=-\frac{1}{2}$. Proto $-\frac{1}{2} \notin K$. Pro všechna $x \in D-\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3;8\right\}$ platí

$$\frac{1}{(x-3)(x-8)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{(x-3)(x-8)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-3)(x-8) > 0\,.$$

Vychází tak $K=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};3\right) \cup (8;\infty)$.

2. Výrazy pod jednotlivými odmocninami musí být nezáporné, což vede po řadě na nerovnice

$$\frac{3-4x}{3x-4}-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11-10x}{3x-4} \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{2x-1}{x+1}-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x+1} \geq 0\,.$$

Platí $D_{v_1}=\left\langle \frac{11}{10};\frac{4}{3}\right)$ a $D_{v_2}=(-\infty;-1) \cup \langle 2;\infty)$. Vzhledem k tomu, že každá odmocnina nabývá jedině nezáporných hodnot, je nerovnice $V_1 \leq 0$ ekvivalentní s podmínkou $V_1=0$, která je splněna právě tehdy, když $x=\frac{11}{10}$.