Pojmy a terminologie kolem rovnic a nerovnic

Předpokladem úspěšného řešení různých druhů rovnic, nerovnic a jejich soustav je jednak obecná zběhlost v úpravách číselných a algebraických výrazů, jednak aktivní znalost vlastností dotyčných elementárních funkcí, které v těchto rovnicích a nerovnicích vystupují. V průběhu řešení takových úloh pracujeme s různými pojmy vyjádřenými specifickými termíny. My učitelé jim musíme dobře rozumět a dbát na to, aby i naši žáci se naučili správně tyto termíny používat. Na výklad těchto pojmů a termínů se v této otázce podrobně zaměříme, protože jim v žákovských učebnicích obvykle není vyřazena žádná samostatná část jejich textu. Následující text je tedy *určen učitelům* a je na nich, kdy a jak jednotlivé jeho části žákům v hodinách matematiky v různé míře podrobnosti či obecnosti objasní.

Rovnost a rovnice, nerovnost a nerovnice

Ve školské matematice je třeba důsledně rozlišovat mezi pojmy *rovnost* a *rovnice*, stejně jako mezi pojmy *nerovnost* a *nerovnice*. Rozdíly vysvětlíme pro první dvojici, pro druhou dvojici je to podobné.

Rovnosti i rovnice mají formálně stejný zápis, který dostaneme, když mezi dva výrazy U a V vložíme rovnítko:

$$U = V$$

Jsou-li přitom U a V dva *číselné* výrazy, jedná se o *rovnost*, která je podle hodnot U a V buď *platná*, nebo *neplatná* (např. $1 + 1 = 3 - 1$, resp. $2 \cdot 2 = 5 + 1$.) My se však dále budeme výlučně věnovat případům, kdy alespoň jeden z výrazů U, V obsahuje jedno nebo více písmen v roli *číselných proměnných*. Zda se jedná o *rovnost* či jde o *rovnici*, musíme upřesnit popisem rolí těchto proměnných (zpravidla tuto roli zdůrazňujeme výběrem písmen z různých úseků abecedy). Ještě než to upřesníme, uvedeme dva příklady s jednou stejně značenou proměnnou x:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{a} \quad 2x + 3 = x^2.$$

První zápis bychom asi spíše považovali za rovnost (která platí pro každou hodnotu proměnné x), druhý zápis za kvadratickou rovnici. Skutečně, rovnost $U = V$ mezi dvěma výrazy U, V s proměnnými běžně zapisujeme (například při úpravách algebraických výrazů) právě v situacích, kdy po *dosazení* jakýchkoli konkrétních číselných hodnot za zastoupené proměnné (mají-li pro ně oba dva výrazy U a V smysl), přejde zápis $U = V$ v platnou rovnost (dvou číselných výrazů). Tehdy říkáme, že rovnost $U = V$ platí *identicky*, nebo ji nazýváme stručněji *identitou*, pro žáky bližším termínem *vzorec*. Příklady takových rovností jsou

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{nebo} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

(Dodejme, že u druhého příkladu namísto jeho číselné platnosti pro libovolné hodnoty a, b můžeme mluvit o *rovnosti polynomů* dvou proměnných: na obou stranách jsou stejné koeficienty u stejných členů $a^m b^n$.) Příklady *identických nerovností* s reálnými proměnnými jsou

$$2^x > 0 \quad \text{nebo} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Kdy tedy zápisu $U = V$ říkáme *rovnice*? Popišme rovnou obecnou situaci: Ve výrazech U a V je libovolný počet proměnných, některé z nich (aspoň jedna, ale třeba také všechny) jsou prohlášeny za *neznámé*, ostatní (pokud nějaké zbývají) za *parametry*. Rovnicím a nerovnicím s parametry se budeme věnovat v otázce 7, proto se nyní omezíme jen na případ, kdy všechny proměnné v rovnici $U = V$ jsou neznámé. Tímto termínem naznačujeme, že *hledáme všechny skupiny* jejich konkrétních číselných hodnot, po jejichž dosazení do obou výrazů U a V přejde zápis $U = V$ v platnou číselnou rovnost. Ve starších učebnicích se trefně psalo, že samotný termín *rovnice* (narozdíl od termínu *rovnost*) vyjadřuje *úkol* zmíněného hledání.

Dvojí význam termínu „řešení“

Uvažujme pro jednoduchost nejprve jednu rovnici s jednou neznámou

$$U(x) = V(x). \tag{1}$$

Řešením (v činnostním smyslu) nazýváme *postup nalezení všech* hodnot x (z daného oboru, o tom pojednáme později), po jejichž dosazení do rovnice (1) vyjde platná číselná rovnost. Ve druhém významu termínem *řešení* nazýváme každou jednotlivou z těchto vyhovujících hodnot x. Místo „číslo x je řešením rovnice (1)“ též říkáme „číslo x splňuje rovnici (1)“, nebo „číslo x vyhovuje rovnici (1)“ nebo „rovnice (1) je splněna pro dané x“, nebo „rovnice (1) má (za) řešení dané x“, ne však, jak někdy slyšíme „rovnice (1) má řešení pro dané x“!

Můžeme tedy říct, že řešením dané rovnice míníme každý postup, který vede k určení množiny *všech* jejích řešení. Slovo „všech“ jsme zdůraznili kurzívou záměrně, na tom se matematikové z jasných důvodů dávno dohodli a my (i naši žáci) to musíme respektovat. Vyřešit (úplně) rovnici (1) tedy nemůžeme tak, že nějaké vyhovující x prostě *uhodneme*.

I kdybychom jich uhodli více, nemáme tím ještě zaručeno, že jiná vyhovující x neexistují. Proto téměř každou zadanou rovnici řešíme postupnými úpravami, které je třeba volit „bezpečně“, tj. tak, abychom při žádné z nich žádnou vyhovující hodnotu neznámých neztratili (je-li to nezbytné, na některých místech postup řešení rozdělíme do několika větví, které pak řešíme odděleně). Ony bezpečné úpravy dělíme na *ekvivalentní* a *důsledkové* a posoudíme je v této otázce později.

Je-li v dané úloze neznámých více, řekněme dvě, a to x a y, jejím řešením pak nazýváme každou uspořádanou dvojici (x, y) čísel x a y, která po dosazení do všech rovnic či nerovnic dané soustavy ji převedou na vesměs platné číselné rovnosti. Říkáme tedy například, že hodnoty $x = 2$ a $y = 3$ tvoří jedno řešení $(2, 3)$ dané úlohy, samotnou hodnotu $x = 2$ (či $y = 3$) bychom jejím řešením nazývat neměli.

Na závěr tohoto odstavce uvedeme příklad rovnice, kterou nelze běžným postupem úprav nijak vyřešit. Je to rovnice

$$2^x + 3^x = 5^x,$$

jejíž řešení $x = 1$ každý snadno uhodne. Pokud ukážeme, že jiné řešení tato rovnice nemá, bude úplné řešení této rovnice (pravda nezvyklým postupem) hotovo. Tvrzení o jediném řešení dokážeme úpravou dané rovnice do tvaru

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

a konstatováním, že nalevo stojí součet dvou funkcí, které jsou obě na intervalu $(-\infty, \infty)$ klesající, takže i celá levá strana upravené rovnice je klesající funkce. To znamená, že nemůže nabývat stejné hodnoty 1 v jiném bodě, nežli je bod $x = 1$.

Řešení, nebo kořen rovnice?

Zmiňme se nyní o termínu *kořen rovnice*. Používáme ho namísto termínu „řešení rovnice“, ovšem výhradně u algebraických rovnic s jednou neznámou, tedy rovnic tvaru $P(x) = 0$, kde

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je mnohočlen s danými koeficienty a_k (je-li $a_n \neq 0$, mluvíme o mnohočlenu, resp. rovnici stupně n). Připomeňme nyní základní poznatky z algebry o kořenech polynomů.

Začneme *Bezoutovou* (čti „bezutovou“) větou: Číslo x_0 je kořenem polynomu P, právě když dvojčlen $x - x_0$ dělí (beze zbytku) polynom P (symbolicky $(x - x_0) \mid P(x)$), neboť zmíněné dělení má obecně zbytek $P(x_0)$, tj. platí Bezoutova rovnost (mnohočlenů, tedy rovnost platná pro každé x)

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0) + P(x_0),$$

kde Q je mnohočlen stupně o 1 menší, nežli je stupeň P. Pokud je navíc k největší přirozené číslo s vlastností $(x - x_0)^k \mid P(x)$, říkáme, že x_0 je k-násobným kořenem polynomu P. V případě $k = 1$ mluvíme o jednoduchém kořenu, v případě $k = 2$ o dvojnásobném kořenu atd.

Nyní už je jasný důvod, proč v případě $P(x_0) = 0$ dvojčlenu $x - x_0$ říkáme *kořenový činitel* polynomu P. Pak je oprávněné rčení, že „řešení algebraické rovnice je hledáním všech jeho kořenových činitelů". Jaké toto hledání obecně má vyhlídky, o tom vypovídá následující výsledek: Každý polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s reálnými koeficienty a_k, který má stupeň $n > 1$, lze rozložit na součin koeficientu a_n (nezapomínejme na něho!) s jedním nebo několika dalšími činiteli, z nichž každý je buďto kořenový činitel $x - x_0$, nebo kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem $p^2 - 4q$; přitom rozklad daného polynomu P na takový součin je (až na pořadí činitelů) jednoznačný. I když takový rozklad teoreticky existuje, v případě stupně $n \geq 5$ neexistuje početní algoritmus k jeho určení z daných koeficientů polynomu P.

Definiční obor, obor pravdivosti

Každou rovnici, nerovnici či jejich soustavu řešíme v některém oboru. Při praktických úlohách jsou tyto obory určeny charakterem neznámých (délka úsečky je *kladné reálné* číslo (při dané jednotce délky), počet prvků konečné množiny je *celé nezáporné* číslo, rychlost auta je omezena jeho motorickými vlastnostmi apod.) Pokud žádný daný význam neznámá nemá, jak je tomu u většiny úloh zadávaných při školní výuce matematiky s výjimkou početní geometrie, bereme pro ni *největší možný* obor čísel (taková je dohoda, kterou je vhodné žákům zdůraznit). Ten je tvořen všemi hodnotami, které můžeme do daných rovnic či nerovnic za neznámé dosadit. Ve školní praxi říkáme, že *hledáme podmínky, za kterých mají dané rovnice či nerovnice smysl*, ať už po jejich dosazení vyjdou platné či neplatné rovnosti či nerovnosti. Mnozí učitelé tak svým žákům vštěpují užitečnou zásadu, že *řešení každé rovnice i nerovnice zahajujeme určením podmínek řešitelnosti.*[1] Tyto podmínky, formulované někdy pozitivně (kupř. $x > 3$), někdy negativně (kupř. $x \neq 3$) vymezují množinu všech „přípustných" hodnot neznámých, které budeme v tomto

[1] Spíše akademický význam má námitka, že tyto podmínky nepotřebujeme, pokud se rozhodneme danou rovnici řešit důsledkovými úpravami a na závěr provedeme zkoušku.

textu říkat *definiční obor* dané rovnice či nerovnice. Ve školské matematice se tento termín běžně nepoužívá, narozdíl od termínu *definiční obor funkce*. Budeme ho dále značit písmenem D.

Zato termín *obor pravdivosti* je ve školní praxi zažitý a běžné používaný termín. Má i standardní značení písmenem K, které najdeme i v odpovědích k úlohám v řadě učebnic a sbírek.[2] Oborem pravdivosti nazýváme množinu všech řešení dané úlohy v zadaném oboru. O pojmu „řešení" jsme už pojednali, takže zbývá jen dodat, že obor pravdivosti je vždy podmnožinou definičního oboru, což zapíšeme jako inkluzi $K \subseteq D$.

K vcelku jasnému pojmu obor pravdivosti dodejme ještě jednu poznámku. Množinu K je třeba závěrem každého řešení nutno přesně popsat jako odpověď k zadané úloze. Bohužel (zvláště u rovnic s jednou neznámou) se setkáváme v případě $K = \mathbb{R}$ s odpovědí: „Rovnice má nekonečně mnoho řešení." Vysvětleme žákům, jak neurčité takové prohlášení je! Jen málo úloh má zadání „Určete, kolik řešení má ...", většina zadání je úkolem „Řešte ...", což jak víme znamená „Najděte všechny ..."

Ekvivalentní a důsledkové úpravy

Otázku dvojího druhu úprav rovnic a nerovnic řeší některé učebnice rovnou výčty běžných ekvivalentních a důsledkových úprav. Z hlediska početní praxe žáků je to pochopitelné, přesto stojí za úvahu, zda nezačít objasněním principiálního rozdílu. Ten spočívá (stručně řečeno) v tom, že ekvivalentní úprava nemění obor pravdivosti dané (ne)rovnice v daném definičním oboru, zatímco důsledková úprava *může* (ale nemusí) obor pravdivosti rozšířit o některé další hodnoty neznámých. Zní to celkem jednoduše, ovšem je třeba dodat, že zejména u nerovnic mnohdy musíme definiční obor rozdělit na několik částí, abychom na každé z nich jako na daném oboru mohli nerovnici řešit ekvivalentními úpravami.

K *ekvivalentním úpravám* každé (ne)rovnice patří *algebraické úpravy* každé z jejích stran, *přičtení* k oběma stranám, resp. *odečtení* od obou stran téhož čísla nebo téhož výrazu, který je definován na celém definičním oboru dané (ne)rovnice. Tyto úpravy přičtení a odečtení je často výhodné interpretovat jako *převody* sčítanců z jedné strany (ne)rovnice na druhou se současnou změnou jejich znamének. K ekvivalentním úpravám rovněž patří *vynásobení* či *vydělení* obou stran *rovnice* týmž číslem nebo týmž výrazem, který je definován a nemá žádnou nulovou hodnotu na celém definičním oboru upravované rovnice. Při vynásobení či vydělení obou stran *nerovnice* týmž nenulovým číslem musíme ovšem uvážit jeho znaménko: je-li číslo kladné, znak nerovnosti se nezmění, je-li číslo záporné, znak nerovnice se „překlopí" (např. $\leq$ přejde v $\geq$).

[2] Musím se přiznat, že nevím, jaký důvod volba písmene K měla.

Podobnou ekvivalentní úpravu vynásobení či vydělení obou stran nenulovým výrazem můžeme u nerovnic použít jen tehdy, má-li výraz na celém definičním oboru pouze kladné, nebo pouze záporné hodnoty (což je poměrně vzácný případ).

Důsledkové úpravy, které často rozšiřují obor pravdivosti o „falešná řešení", používáme téměř *výhradně u rovnic, nikoliv u nerovnic.* Hlavní důvod je ten, že obory pravdivosti nerovnic jsou zpravidla nekonečné množiny, takže je nemožné provést zkoušku dosazením všech jednotlivých hodnot, abychom případná falešná řešení odhalili.

K obvyklým důsledkovým úpravám patří jednak *vynásobení* obou stran (ne)rovnice týmž výrazem, jednak jejich *umocnění* (na druhou). První úpravu používáme s cílem *zbavit se zlomků* u rovnic s lomenými výrazy. Jak jsme již vysvětlili, u nerovnic odstraňování zlomků nedoporučujeme, neboť jmenovatelé jsou často výrazy, jejichž hodnoty na definičním oboru jsou jak kladné, tak záporné, takže vynásobení těmito výrazy se zapíše jako ekvivalentní úprava na různých částech definičního oboru různě. Raději proto při úpravách nerovnic s lomenými výrazy zlomky „táhneme sebou" až konečné podoby nerovnice v podílovém tvaru (o něm pojednáme níže).

Umocnění na druhou je úprava, kterou používáme s cílem *zbavit se odmocnin*, které jsou v (ne)rovnici zastoupeny. Díky pouze jednostranné implikaci $U = V \Rightarrow U^2 = V^2$ je umocnění *důsledkovou úpravu rovnic.* U nerovnic obecně vzato nejde o důsledkovou úpravu, neboť např. po umocnění platné nerovnosti $-2 < 1$ dostaneme neplatnou nerovnost $4 < 1$. Přesto se potřebujeme při řešení nerovnic odmocnin zbavovat, takže se umocňování nevyhneme. Přitom, jak jsme vysvětlili, by mělo jít o ekvivalentní úpravu. Dosáhneme toho tak, že definiční obor zadané nerovnice, zapišme ji obecně jako $U \gtreqless V$ s neurčeným znakem nerovnosti, rozdělíme na intervaly tak, aby na každém z nich měly obě strany U, V neměnné znaménko. Danou nerovnici pak řešíme na každém z těchto intervalů odděleně. To je snadné na těch intervalech, kde strany mají *různá znaménka* — na nich nerovnice $U \gtreqless V$ pak „automaticky" buď platí, nebo neplatí, a to pro pro všechny hodnoty neznámé, které v daném intervalu leží. Na těch intervalech, kde strany U a V mají *stejná znaménka*, pak můžeme nerovnici ekvivalentně umocnit, neboť v případě *nezáporných* hodnot U, V platí $U \gtreqless V \Leftrightarrow U^2 \gtreqless V^2$, v případě *nekladných* hodnot U, V je lépe před umocněním vynásobit obě strany nerovnice číslem -1 a přejít tak k nerovnici s nezápornými stranami.

Zkouška – nutná součást řešení?

Zkouška neboli *kontrola správnosti* výpočtového postupu je důležitou závěrečnou částí řešení matematických úloh. Pomineme teď její *psychologický* význam (žáci mají radost, že došli ke správnému výsledku) i její možnou zpochybnitelnost ze subjektivních důvodů — při správném postupu jsme mohli udělat numerickou chybu při zkoušce, nebo jsme mohli dokonce pochybit jak při postupu, tak při zkoušce. Zaměříme se pouze na otázku, kdy je zkouška *nezbytná*, takže bez ní vlastně není řešení úlohy úplné.

Odpověď na poslední otázku jsme už podali v předchozím výkladu o důsledkových úpravách. Pokud při celém postupu řešení dané rovnice použijeme aspoň jednu důsledkovou úpravu, může se stát, že upravená rovnice má širší obor pravdivosti nežli rovnice původní. Proto je v závěru řešení nezbytné každou z nalezených hodnot dosadit do obou stran původní rovnice a přesvědčit se, zda rovnice přejde v platnou rovnost. Máme-li předem určen definiční obor D rovnice, můžeme při dosazování rovnou vynechat ty hodnoty, které nejsou z D. Teprve takto provedená zkouška odhalí případná „falešná řešení“, která do oboru pravdivosti původní rovnice nepatří.

Součinové a podílové tvary

Každou rovnici i nerovnici lze zřejmě upravit na tvar, kdy na jedné její straně bude stát číslo 0. Nulovost jedné bude mít význam, pokud se nám druhou (nenulovou) stranu podaří dále upravit — jak, to hned upřesníme.

Říkáme, že daná rovnice či nerovnice je v *součinovém tvaru*, je-li jedna její strana *rovna nule* a druhá strana je *součinem* dvou nebo více výrazů. Na prvním místě jsme uvedli nulovost jedné strany, abychom zdůraznili, že například rovnice

$$(2x^2 - 3x + 2)(5x^2 + 4x - 6) = 3$$

není v součinovém tvaru. Proč si tento název „nezaslouží“? Protože její tvar žádný výhodný postup řešení nenabízí — číslo 3 lze totiž zapsat ve tvaru součinu dvou (nenulových, avšak nijak výjimečných) čísel nekonečně mnoha způsoby. Oproti tomu rovnice

$$(2x^2 - 3x + 2)(5x^2 + 4x - 6) = 0$$

signalizuje, že aspoň jeden z činitelů na levé straně se musí rovnat nule, takže její řešení se redukuje na (oddělené) řešení dvou rovnic

$$\mathrm{A}\colon 2x^2 - 3x + 2 = 0, \qquad \mathrm{B}\colon 5x^2 + 4x - 6 = 0;$$

nalezené obory pravdivosti rovnic A a B je pak nutné sjednotit, abychom dostali obor pravdivosti původní rovnice v součinovém tvaru. Podobně se řešení obecné rovnice v součinovém tvaru

$$V_1 \cdot V_2 \cdots V_n = 0$$

rozpadá na oddělené řešení n rovnic $V_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Také nula na pravé straně každé nerovnice *v součinovém tvaru* (jinak o něm ani nemluvíme!)

$$V_1 \cdot V_2 \cdots V_n \gtreqless 0$$

dává zřejmou informaci o tom, jaké *variace znamének* musí mít hodnoty zastoupených činitelů V_k, aby jejich součin měl hodnotu předepsaného znaménka. Mohli bychom tak řešit pro každou takovou variaci příslušnou soustavu nerovnic

$$V_1 \gtreqless 0,\ V_2 \gtreqless 0, \ldots,\ V_n \gtreqless 0.$$

Často je však výhodnější užít tzv. *metodu intervalů*: rozdělit celý definiční obor dané nerovnice na oblasti, na kterých výrazy V_k nemění znaménko (v případě jedné neznámé to jsou obvykle právě *intervaly*), na každé z nich pak určit znaménko celé součinu $V_1 \cdot V_2 \cdots V_n$ a pak do oboru pravdivosti zahrnout právě ty intervaly, ve kterých má součin „správné“ znaménko předepsané zadanou nerovnicí. (Zda tam budou patřit i krajní body vytvořených intervalů, závisí na tom, zda je původní nerovnice ostrá či nikoliv).

Nebudeme opakovat popis obdobných výhod, jaké přinášejí úpravy daných rovnic a nerovnic do *podílového* tvaru. Tak nazýváme rovnice a nerovnice, jejichž jedna strana je *rovna nule* a druhá strana je *podílem* dvou výrazů, tedy tvaru U/V. Je navíc výhodné mít oba tyto výrazy U, V ještě dále rozložené na součin činitelů. Zapíšeme proto rovnici, resp. nerovnici v podílovém tvaru rovnou obecným způsobem

$$\frac{U_1 \cdot U_2 \cdots U_m}{V_1 \cdot V_2 \cdots V_n} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{U_1 \cdot U_2 \cdots U_m}{V_1 \cdot V_2 \cdots V_n} \gtreqless 0$$

(V případech $m = 1$, resp. $n = 1$ není rozklad čitatele, resp. jmenovatele na součin k dispozici.)

Jako konkrétní příklady úprav na posuzované tvary uveďme úpravu jedné goniometrické rovnice do součinového tvaru

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0$$

a úpravu jedné racionální nerovnice (kdy není radno, jak už víme, zbavovat se zlomků) do podílového tvaru:

$$\frac{1}{x-2} \geq \frac{36}{x+3} - 10 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{36}{x+3} + 10 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5(15-7x)}{(x-2)(x+3)} + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5(15-7x) + 10(x^2+x-6)}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5(2x^2-9x+3)}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5(x-1)(2x-3)}{(x-2)(x+3)} \geq 0.$$

KONEC OTÁZKY