Hesla k otázkám ústní zkoušky

01. Základy matematické logiky

Výrok a jeho negace. Jednoduché a složené výroky. Tautologie a kontradikce, jejich ověřování tabulkami pravdivostních hodnot.
Logické spojky konjunkce a disjunkce, jejich slovní vyjádření a tabulkové definice. Kdy platí konjunkce a kdy disjunkce dvou výroků? De Morganova pravidla pro jejich negace.
Logická spojka implikace, její slovní vyjádření a tabulková definice. Negativní vymezení neplatnosti implikace. Pravidlo pro negaci implikace. Opačná implikace a obměněná implikace.
Logická spojka ekvivalence, její slovní vyjádření, souvislost s implikacemi a tabulková definice. Kdy platí ekvivalence dvou výroků? Pravidlo pro negaci ekvivalence.
Kvantifikované výroky. Obecný a existenční kvantifikátory, jejich slovní vyjádření.
Pravidla pro negace výroků s kvantifikátory.

02. Číselné obory, mocniny s celočíselným exponentem

Rozvíjení představ žáků o číslech na základní a střední škole.
Aritmetické operace a uspořádání čísel. Znázornění čísel na přímce.
Dělitelnost celých čísel — které dovednosti s touto relací spojujeme a jaký význam pro další početní praxi mají.
K čemu slouží zlomky a jak je žákům přibližujeme? Procenta, poměry a úměry.
Proč na ZŠ potřebujeme iracionální čísla a jak je žákům přibližujeme (dekadickými zápisy i geometricky). Zaokrouhlování čísel.
Mocniny s exponentem z oboru přirozených čísel, s exponentem nula a s exponentem z oboru celých záporných čísel. Pravidla pro počítání s takovými mocninami.

03. Pojmy a terminologie kolem rovnic a nerovnic

Rovnost a rovnice, nerovnost a nerovnice.
Dvojí význam termínu „řešení“.
Řešení, nebo kořen rovnice?
Definiční obor, obor pravdivosti.
Ekvivalentní a důsledkové úpravy.
Zkouška – nutná součást řešení?
Součinové a podílové tvary rovnic a nerovnic.

04. Lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Úpravy vedoucí k finálním tvarům lineární rovnice či nerovnice.
Řešení lineární rovnice či nerovnice s absolutními hodnotami.
Obor pravdivosti jedné lineární rovnice či nerovnice se dvěma neznámými, jeho grafické znázornění.
Soustava dvou lineárních rovnic s dvěma neznámými, dvě základní metody jejího řešení.
Možné obory pravdivosti soustavy dvou lineárních rovnic s dvěma neznámými.

05. Kvadratické rovnice a nerovnice
Co je kvadratická rovnice? Její řešení pamětným rozkladem.
Neúplné kvadratické rovnice a jejich kořeny.
Odvození vzorce pro kořeny kvadratické rovnice. Diskriminant.
Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, jejich odvození.
Řešení kvadratické rovnice grafickou metodou.
Kvadratické nerovnice a postup jejich řešení.
Grafické řešení kvadratické nerovnice.

06. Rovnice a nerovnice s odmocninami
Základní strategie řešení a dvě základní metody její realizace.
Umocnění obou stran rovnice či nerovnice a jeho vliv na postup řešení.
Substituční metoda — obecný popis pro (ne)rovnici s jednou neznámou.
Typické substituce u (ne)rovnic s odmocninami.
Metoda násobení sdruženým výrazem.

07. Rovnice a nerovnice s parametry
Rozdělení proměnných v (ne)rovnicích na neznámé a parametry, rozdílnost jejich rolí.
Obecný význam úloh s parametry. Důvody náročnosti jejich řešení (porozumění, početní realizace, shrnutí výsledků do tabulky).
Co je nového při řešeních rovnic a nerovnic s parametry oproti takovým úlohám bez parametru? Jaké komplikace to přináší?
Jak určovat znaménka kořenů kvadratické rovnice v závislosti na parametru?

08. Pojmy a terminologie kolem funkcí a jejich grafů.
Pojem funkce, způsoby jejího zadání. Definiční obor a obor hodnot. Termíny argument a funkční hodnota (vzor a obraz), nezávislá a závislá proměnná.
Funkce prostá (injektivní). Inverzní funkce, její existence, definiční obor a obor hodnot v porovnání s původní funkcí. Funkce periodická a její periody. Funkce sudé a funkce liché, původ těchto termínů.
Kdy říkáme, že na dané množině je daná funkce shora ohraničená, zdola ohraničená, ohraničená? Extrémní hodnoty (minima a maxima) dané funkce na dané množině.
Monotonie funkcí: funkce rostoucí a klesající na dané množině, symbolický zápis formulí s dvěma kvantifikátory.
Pojem grafu funkce. Jak z grafu dané funkce $y = f(x)$ snadno získat grafy jiných funkcí? Kterých?

**09. Lineární funkce (i s absolutními hodnotami)
a lineární lomená funkce.**
Lineární funkce, její graf a geometrický význam koeficientů.
Jak určit lineární funkci z jejích hodnot v několika (kolika?) bodech?
Jak sestrojit graf funkce, která je součtem jedné lineární funkce s lineární kombinací několika dalších lineárních funkcí vzatými v absolutní hodnotě? Jaký geometrický tvar každý takový graf má?
Pojem lineárně lomené funkce jako zobecnění funkce nepřímé úměrnosti, její definiční obor a obor hodnot.
Graf lineárně lomené funkce, převodu obecného předpisu na „kanonický“ tvar.

10. Kvadratické funkce
Kvadratické funkce, její graf, geometrický význam koeficientů.
Převod obecného předpisu do „kanonického“ tvaru.
Poloha grafu kvadratické funkce vůči osám x a y, role diskriminantu.
Průběh kvadratické funkce (intervaly monotonnosti, extrém, ohraničenost shora nebo zdola).
Využití obecných poznatků o průběhu při řešení kvadratických rovnic a nerovnic.

11. Odmocniny a mocniny s racionálním exponentem
Pojem n-té odmocniny, definiční obor, obor hodnot a graf příslušné funkce $y = \sqrt[n]{x}$.
Pravidla pro počítání s odmocninami.
Proč pro každé celé $n > 1$ ztotožňujeme funkci $y = x^{\frac{1}{n}}$ s funkcí $y = \sqrt[n]{x}$?
Pro které zlomky $\frac{m}{n}$ definujeme $x^{\frac{m}{n}}$? Jak a pro která x?
Korektnost zavedení mocniny x^r s racionálním exponentem r.

12. Mocninné funkce
Jak přiblížíme žákům problematiku mocnin x^p s iracionálním exponentem p?
Pravidla pro úpravy mocnin s reálnými exponenty.
Mocninná funkce $y = x^a$ s a) přirozeným, b) celým záporným, c) kladným necelým reálným d) záporným necelým reálným exponentem a. Jaké jsou definiční obory a obory hodnot této funkce v uvedených případech? Jak při nich vypadá graf mocninné funkce a jaká je její monotonie?

13. Exponenciální funkce
Exponenciální funkce $y = a^x$, pro jaká a ji uvažujeme, její definiční obor, obor hodnot, graf a monotonie. Vzájemná poloha grafů dvou funkcí $y = a^x$ a $y = b^x$ v případech $0 < a < b < 1$ a $1 < a < b$. Kdy jsou takové dva grafy souměrně sdružené podle osy y?
Jak žákům přiblížíme určení přirozené exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$?

14. Logaritmy a logaritmické funkce
Slovní definice čísla $\log_a b$.
Pravidla pro počítání s logaritmy včetně převodního vztahu mezi hodnotami $\log_a x$ a $\log_b x$.
Historický význam dekadických logaritmů.
Logaritmické funkce $y = \log_a x$, pro jaká a ji uvažujeme, její definiční obor, obor hodnot, graf a monotonie. Vztah mezi grafy funkcí $y = a^x$ a $y = \log_a x$.

15. Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice
Převod (ne)rovnic do tvarů $a^U \gtreqless a^V$, resp. $\log_a U \gtreqless \log_a V$, využití injektivity nebo monotonie při následném přechodu k (ne)rovnici mezi výrazy U a V.
Řešení užitím substituce $y = a^x$ nebo $y = \log_a x$.
Řešení (ne)rovnice tvaru $pa^{2x} + q(ab)^x + rb^{2x} \gtreqless 0$.

16. Goniometrické funkce

Goniometrické funkce ostrého úhlu definované užitím podobných pravoúhlých trojúhelníků. Hodnoty funkcí pro významné úhly $30°$, $45°$ a $60°$ a pro dvojice úhlů, které se doplňují do $90°$.
Funkce sinus a kosinus reálného argumentu definované užitím jednotkové kružnice a pojmu orientovaného úhlu s obloukovou mírou.
Které vlastnosti funkcí sinus a kosinus plynou z geometrie jednotkové kružnice?
Převod sinu na kosinus a naopak.
Definice funkcí tangens a kotangens, odečítání jejich hodnot na tečně k jednotkové kružnici. Definiční obory a obory hodnot obou funkcí, jejich periodicita, znaménka a monotonie v jednotlivých kvadrantech.
Grafy goniometrických funkcí v oboru reálných čísel. Problematika inverzních funkcí: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens, jejich definiční obory, obory hodnot a grafy.

17. Goniometrické vzorce

Triviální vzorce: goniometrická jednička, vztah mezi $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.
Z platnosti jednoho součtového vzorce pro $\sin(x \pm y)$ a $\cos(x \pm y)$ odvoďte platnost ostatních tří vzorců.
Vzorce pro $\operatorname{tg}(x \pm y)$.
Vzorce pro dvojnásobný argument s trojím vyjádřením $\cos 2x$.
Vzorce pro poloviční úhel, jejich nejednoznačnost.
Odvození vzorců pro $\sin x \pm \sin y$ a $\cos x \pm \cos y$ ze součtových vzorců.
Univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pomůcka pro odvození s ní souvisejících vzorců.

18. Goniometrické rovnice

Základní goniometrická rovnice, etapy jejího řešení.
Rovnice typu $g(U) = g(V)$ a možné postupy jejího řešení.
Substituce $y = \sin x$, $y = \cos x$ a $y = \sin x + \cos x$.
Rovnice $F(\sin x, \cos x) = 0$ a možné postupy jejího řešení.
Rovnice $a \sin x + b \cos x + c = 0$ a dvě metody jejího řešení.
Metoda řešení goniometrických rovnic převodem na součinový tvar.

19. Sinová věta

Sinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku.
Rozšířená sinová věta a její obrázkový důkaz.
Typické situace pro užití sinové věty při „řešeních trojúhelníků“. Případná dvojznačnost řešení a její souvislost s větou Ssu.
Různé vzorce pro obsah trojúhelníku.
Aplikace: Určení šířky řeky měřením z věže.

20. Kosinová věta

Kosinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku a Pythagorovu větu, kterou zobecňuje.
Typické situace pro užití kosinové věty při „řešeních trojúhelníků“.
Odvození Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku metodou užití kosinové věty.
Aplikace: Určení vzdálenosti dvou bodů na druhém břehu řeky měřením ze dvou bodů na prvním břehu.

Konec dokumentu