Osnovy dalších otázek

04. Lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Pro rovnice a nerovnice se závorkami, zlomky a lomenými výrazy vyložte postup řešení cestou úprav vedoucích k finálním tvarům $ax = b$, resp. $ax \gtreqless b$. Jak vypadají možné obory pravdivosti těchto finálních tvarů v závislosti na hodnotách koeficientů a, b? Postup pro lineární rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami. Obor pravdivosti jedné lineární rovnice či nerovnice se dvěma neznámými, jeho grafické znázornění.

Soustava dvou lineárních rovnic s dvěma neznámými, dosazovací a sčítací metody jejího řešení. Jak vypadají možné obory pravdivosti takové soustavy v závislosti na jejích koeficientech?

05. Kvadratické rovnice a nerovnice

Co je kvadratická rovnice? Metoda řešení takové rovnice s malými celočíselnými koeficienty pamětným rozkladem trojčlenu na součin dvou dvojčlenů. Neúplné kvadratické rovnice a jejich kořeny.

Odvození vzorce pro kořeny rovnice metodou doplnění na čtverec. Pojem diskriminantu a jeho význam pro počet kořenů.

Odvození vztahy mezi kořeny a koeficienty jednak ze vzorců pro kořeny, jednak z rozkladu příslušného trojčlenu na kořenové činitele.

Řešení kvadratické rovnice grafickou metodou (užitím vykreslené paraboly s vrcholem v počátku).

Kvadratické nerovnice a postup jejich řešení v případech kladného, nulového nebo záporného diskriminantu. Grafické řešení kvadratické nerovnice (užitím vykreslené paraboly s vrcholem v počátku).

06. Rovnice a nerovnice s odmocninami

Základní strategie řešení — zbavit se odmocniny, a to buď cestou jejího osamostatnění na jedné straně a následného umocnění obou stran, nebo záměnou odmocniny za novou neznámou (substituční metoda).

Jaký druh úpravy umocnění obou stran rovnice či nerovnice je a jaký to má vliv na postup řešení?

Substituční metoda — obecně spočívá v nahrazení neznámé x novou neznámou $y = V(x)$, kde $V(x)$ je výraz v dané (ne)rovnici. Je-li v ní neznámá x zastoupena i jinak, nežli jen ve výrazu x, je k odstranění takových výskytů x v (ne)rovnici pro y zpravidla nutné najít obecné vyjádření $x = V^{-1}(y)$. To je mnohdy těžší úkol, nežli se v závěru řešení „vrátit“ od neznámé y k neznámé x cestou řešení rovnic $V(x) = y^\star$ pro každé $y^\star$ z oboru pravdivosti (ne)rovnice pro y. U (ne)rovnic s odmocninami jsou typické substituce

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{ax+b} \quad \text{pro (ne)rovnici} \quad R(x, \sqrt{ax+b}) \gtreqless 0, \\ y &= \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{pro (ne)rovnici} \quad R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \gtreqless 0, \end{aligned}$$

kde R je libovolná racionální lomená funkce dvou proměnných. U obou těchto substitucí má opačné vyjádření x pomocí y výhodný tvar, jaký bychom neměli při substituci $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, kde by se znovu objevila odmocnina. Vyplatí se často mít na zřeteli, že u obou popsaných substitucí platí $y \geq 0$, takže novou rovnici pro neznámou y stačí řešit v oboru nezáporných čísel.

Metoda násobení sdruženým výrazem pro rovnice tvaru

$$\sqrt{U(x)} + \sqrt{V(x)} = W(x) \quad \text{nebo} \quad \sqrt{U(x)} - \sqrt{V(x)} = W(x)$$

Viz skripta MU: Herman, Kučera, Šimša, Metody řešení matematických úloh I, kap. 1, §6. V tomto paragrafu najdete i celkové poučení o rovnicích s odmocninami.

07. Rovnice a nerovnice s parametry

Rozdělení proměnných v (ne)rovnicích na neznámé a parametry, rozdílnost jejich rolí. Obecný význam úloh s parametry: jedním postupem řešíme celou (obvykle nekonečnou) skupinu podobných úloh, které dostaneme, pokud zastoupené parametry nahradíme konkrétními čísly. Úlohy s parametry jsou náročným tématem, neboť problémem je jednak porozumění samotné podstaty parametrů, jednak realizace postupu řešení konkrétní úlohy. Ten se často větví do několika etap a netriviálním úkolem je i závěrečné shrnutí výsledků dílčích etap do přehledné tabulky.

Metody řešení rovnic a nerovnic s parametry se neliší od metod pro takové úlohy bez parametru. Řešíme je tedy stejnými úpravami, jako by v nich namísto parametrů stála konkrétní čísla. Komplikace však přináší závislost definičního oboru na parametrech, stejně jako intervalů, na kterých můžeme jednotlivé úpravy provádět, nebo které dostáváme po převodu na rovnice a nerovnice v součinovém nebo podílovém tvaru. Netriviální je pak rovněž určování průniku nebo sjednocení takových intervalů.

Řešení finálních (ne)rovnic, těch lineárních $a(p)x \gtreqless b(p)$, a tím spíše těch kvadratických $a(p)x^2 + b(p)x + c(p) \gtreqless 0$, je komplikováno závislostí zastoupených koeficientů na parametru p. Jak? Popište také postup, jak určovat znaménka kořenů kvadratické rovnice v závislosti na parametru.

08. Pojmy a terminologie kolem funkcí a jejich grafů.

Pojem funkce, způsoby jejího zadání. Definiční obor a obor hodnot. Termíny argument a funkční hodnota (vzor a obraz), nezávislá a závislá proměnná.

Funkce prostá (injektivní). Inverzní funkce, její existence, definiční obor a obor hodnot v porovnání s původní funkcí. Funkce periodická a její periody. Funkce sudé a funkce liché, původ těchto termínů. Kdy říkáme, že na dané množině je daná funkce shora ohraničená, zdola ohraničená, ohraničená? Extrémní hodnoty (minima a maxima) dané funkce na dané množině.

Monotonie funkcí: funkce rostoucí a klesající na dané množině, symbolický zápis formulí s dvěma kvantifikátory. Na jakých množinách je funkce $y = 1/x$ klesající?

Pojem grafu funkce. Jak z grafu dané funkce $y = f(x)$ získat grafy funkcí $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + k$, $y = f(x + k)$ s danou konstantou k?

09. Lineární funkce (i s absolutními hodnotami) a lineární lomená funkce.

Pojem lineární funkce. Její graf a význam koeficientů a, b v předpisu $y = ax + b$. Jak určit lineární funkci z jejích hodnot v několika (kolika?) bodech? Jak sestrojit graf funkce, která je součtem jedné lineární funkce s lineární kombinací několika dalších lineárních funkcí vzatými v absolutní hodnotě? Jaký geometrický tvar každý takový graf má?

Pojem lineárně lomené funkce jako zobecnění funkce nepřímé úměrnosti. Její definiční obor a obor hodnot. Graf lineárně lomené funkce, postup při převodu obecného předpisu na tvar $y - n = \dfrac{k}{x - m}$, význam koeficientů m, n, k.

10. Kvadratické funkce

Pojem kvadratické funkce. Její graf, postup při převodu obecného předpisu do tvaru $y - n = a(x - m)^2$, význam koeficientů a, m a n. Poloha grafu kvadratické funkce vůči osám x a y, role diskriminantu.

Průběh kvadratické funkce (intervaly monotonnosti, extrém, ohraničenost shora nebo zdola). Využití obecných poznatků o průběhu při řešení kvadratických rovnic a nerovnic.

11. Odmocniny a mocniny s racionálním exponentem

Pojem n-té odmocniny, definiční obor, obor hodnot a graf příslušné funkce $y = \sqrt[n]{x}$. Pravidla pro počítání s odmocninami (odmocnina ze součinu a podílu, mocnina odmocniny a odmocnina z odmocniny).

Ze základního pravidla pro mocniny $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ (viz otázku 2 o rozšiřování pojmu mocnina na obecnější situace) vysvětlete, proč pro každé celé $n > 1$ ztotožňujeme funkci $y = x^{\frac{1}{n}}$ s funkcí $y = \sqrt[n]{x}$, takže pak pro každé celé m klademe $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$. Jaké je zde omezení na x v případě $m > 0$ a v případě $m \leq 0$?

Vysvětlete, proč při zavedení mocniny x^r s racionálním exponentem r pomocí vztahu $x^r = x^{\frac{m}{n}}$, kde $\frac{m}{n}$ je zlomek ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) reprezentující dané číslo r, je hodnota x^r nezávislá na tom, který z nekonečně mnoha zlomků $\frac{m}{n}$ reprezentující dané číslo r vybereme (učebnice Funkce, str. 115–116).

12. Mocninné funkce

Podle učebnice Funkce, str. 119–121, přibližte žákům středních škol problematiku mocniny x^p s iracionálním exponentem p. Pravidla pro úpravy mocnin s reálnými exponenty.

Mocninná funkce $y = x^a$ s a) přirozeným, b) celým záporným, c) kladným necelým reálným d) záporným necelým reálným exponentem a. Jaké jsou definiční obory a obory hodnot této funkce v uvedených případech? Jak při nich vypadá graf mocninné funkce a jaká je její monotonie?

13. Exponenciální funkce

Pojem exponenciální funkce $y = a^x$, pro jaká a ji uvažujeme, její definiční obor, obor hodnot, graf a monotonie. Vzájemná poloha grafů dvou funkcí $y = a^x$ a $y = b^x$ v případech $0 < a < b < 1$ a $1 < a < b$. Kdy jsou takové dva grafy souměrně sdružené podle osy y?

Jak žákům přiblížit určení přirozené exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$? (učebnice Funkce, str. 150–151) Spojte to při svém nadhledu s výjimečností výsledku derivování $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

14. Logaritmy a logaritmické funkce

Slovní popis významu čísla $\log_a b$: Je to takové číslo, na které musíme umocnit základ a, abychom .... Procvičování na konkrétních dvojicích (a, b). Pravidla pro počítání s logaritmy včetně převodního vztahu mezi hodnotami $\log_a x$ a $\log_b x$. Historický význam dekadických logaritmů (logaritmické tabulky a pravítka, viz učebnice Funkce, str. 150). Konvence $\log = \log_{10}$ a $\ln = \log_{\mathrm{e}}$.

Pojem logaritmické funkce $y = \log_a x$, pro jaká a ji uvažujeme, její definiční obor, obor hodnot, graf a monotonie. Vztah mezi grafy funkcí $y = a^x$ a $y = \log_a x$.

15. Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice

Převod (ne)rovnic do tvarů $a^U \gtreqless a^V$, resp. $\log_a U \gtreqless \log_a V$, využití injektivity nebo monotonie při následném přechodu k (ne)rovnici mezi výrazy U a V, který se často nazývá „zlogaritmováním“, resp. „odlogaritmováním“. Příklad rovnice $2^x = 5$.

Substituce $y = a^x$ a $y = \log_a x$: určete, v jakých výrazech může neznámá v dané (ne)rovnici vystupovat, aby navržená substituce byla účinná. Postup při řešení (ne)rovnice tvaru $pa^{2x} + q(ab)^x + rb^{2x} \gtreqless 0$.

16. Goniometrické funkce

Goniometrické funkce ostrého úhlu definované užitím podobných pravoúhlých trojúhelníků. Hodnoty funkcí pro významné úhly $30°$, $45°$ a $60°$ a pro dvojice úhlů, které se doplňují do $90°$.

Funkce sinus a kosinus reálného argumentu definované užitím jednotkové kružnice a pojmu orientovaného úhlu s obloukovou mírou. Které vlastnosti obou funkcí plynou z geometrie jednotkové kružnice: obor hodnot obou funkcí a goniometrická jednička, znaménka funkcí a jejich monotonie v jednotlivých kvadrantech, periodicita, sudost a lichost, změna argumentu o polovinu nejmenší periody, hodnoty $\sin(\pi - x)$ a $\cos(\pi - x)$. Převod sinu na kosinus a naopak užitím vzorců $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ a $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.

Funkce tangens a kotangens, odečítání jejich hodnot na tečně k jednotkové kružnici. Definiční obory a obory hodnot obou funkcí, jejich periodicita, znaménka a monotonie v jednotlivých kvadrantech.

Grafy goniometrických funkcí v oboru reálných čísel. Problematika inverzních funkcí: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens, jejich definiční obory, obory hodnot a grafy.

17. Goniometrické vzorce

Triviální vzorce: goniometrická jednička, vztah mezi $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Nepovinná část: Obrázkové důkazy vzorců pro $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ (Smýkalová: Goniometrické funkce v elementární matematice, str. 52-53).

Z platnosti jednoho *součtového vzorce* pro $\sin(x \pm y)$ a $\cos(x \pm y)$ odvoďte platnost ostatních tří vzorců (učebnice Goniometrie, str. 87–88). Jak se ujistit, že si součtové vzorce pamatujeme správně: v pravidle pro násobení komplexních jednotek

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)(\cos y + \mathrm{i} \sin y) = \cos(x + y) + \mathrm{i} \sin(x + y)$$

roznásobíme levou stranu a pak porovnáme reálné a imaginární části obou stran. Vzorce pro $\operatorname{tg}(x \pm y)$.

Vzorce pro dvojnásobný argument s trojím vyjádřením $\cos 2x$. Učebnice z toho odvozuje vzorce pro hodnoty $|\sin \frac{x}{2}|$ a $|\cos \frac{x}{2}|$ pomocí $\cos x$, jejich význam dokládá vyjádřením přesné hodnoty $\cos \frac{\pi}{24}$ ze známé hodnoty $\cos \frac{\pi}{6}$ přes hodnotu $\cos \frac{\pi}{12}$. Takové výpočty s odmocninami prováděl Archimédes při výpočtech čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků a sestavovatelé goniometrických tabulek před zrodem matematické analýzy.

Odvození vzorců pro $\sin x \pm \sin y$ a $\cos x \pm \cos y$ ze součtových vzorců (učebnice Goniometrie, str. 94–95).

Co v učebnici Goniometrie chybí: Při počítání s goniometrickými funkcemi se někdy využívá poznatek, že hodnoty $\sin x$, $\cos x$ (a tedy i $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$) lze vyjádřit pomocí jediné hodnoty $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (tzv. *univerzální substituce*). Tyto vzorce si nemusíme pamatovat, je ale dobré znát snadnou pomůcku pro jejich odvození (které je korektní v případě $x \in (0, \pi)$, ale poskytuje obecně platné vzorce): uvážíme pravoúhlý trojúhelník s ostrým úhlem $\frac{x}{2}$, který má odvěsny 1 a t, takže podle Pythagorovy věty má přeponu $\sqrt{1 + t^2}$. Z něho máme $\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ a $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Dosazením do známých vzorců $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ a $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ dostaneme kýžené vzorce $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

18. Goniometrické rovnice

Základní rovnice $\boxed{g(x) = a}$ pro danou goniometrickou funkci g a dané reálné číslo a. Postup jejího řešení ve třech etapách (podle učebnice Goniometrie str. 66–72, s výhradou k užívání termínu „kořen goniometrické rovnice“ – viz otázka 3, a k nesystematickému zařazení příkladů goniometrických nerovnic. které dnes v učebních programech většinou chybí).

První etapa: řešení pomocné rovnice $g(x) = |a|$ v oboru $\langle 0, \frac{pi}{2} \rangle$ s případným užitím inverzní arkusfunkce. Druhá etapa: hledání tzv. základních řešení původní rovnice $g(x) = a$ (tj. řešení z intervalu $\langle 0, 2\pi)$) dvěma rovnocennými prostředky – užitím buď jednotkové kružnice, nebo grafu dané funkce g. Třetí etapa: zápis celého oboru pravdivosti K dané rovnice, vyjádření periodicity funkce g parametrem $k \in \mathbb{Z}$. Častá modifikace základní rovnice $g(x) = a$: rovnice $g(bx + c) = a$ s danými čísly $b \neq 0$, c.

Rovnice $\boxed{g(U) = g(V)}$, kde U a V jsou dané výrazy s neznámou x, zpravidla tvaru $ax + b$. Závěr založený na nejmenší periodě p dané goniometrické funkce g, totiž rovnost $V = U + kp$ ($k \in \mathbb{Z}$), je správný pouze pro funkce g rovné tangens a kotangens. Pro funkce sinus a kosinus jsou správné dva postupy: buďto upravit rovnici do tvaru $g(U) - g(V) = 0$ a následně do součinového tvaru užitím vzorců pro rozdíl sinů nebo kosinů, nebo využít průběh obou funkcí k jednomu ze dvou závěrů:

(1) Rovnost $\sin U = \sin V$ je splněna, právě když platí $V = U + 2k\pi$ nebo $V = \pi - U + 2k\pi$.
(2) Rovnost $\cos U = \cos V$ je splněna, právě když platí $V = U + 2k\pi$ nebo $V = -U + 2k\pi$.

Řešení rovnice $\sin U = \cos V$ užitím převodu $\cos V = \sin(\frac{\pi}{2} - V)$ (nebo převodu $\sin U = \cos(\frac{\pi}{2} - U)$).

Substituční metoda: Uvedeme tři substituce, jejichž užití je založeno na goniometrické jedničce a vzorcích pro dvojnásobný argument. V zápisech rovnic označuje F libovolný výraz o dvou proměnných.

(1) $\boxed{y = \sin x}$ pro rovnice $F(\sin x, \cos^2 x) = 0$ a $F(\sin x, \cos 2x) = 0$,
(2) $\boxed{y = \cos x}$ pro rovnice $F(\cos x, \sin^2 x) = 0$ a $F(\cos x, \cos 2x) = 0$,
(3) $\boxed{y = \sin x + \cos x}$ pro rovnice $F(\sin x + \cos x, \sin 2x) = 0$. Využijeme přitom zřejmé identity $\sin 2x = y^2 - 1$.

Zdůrazněme absenci vhodné substituce pro rovnice $F(\sin x, \sin 2x) = 0$ a $F(\cos x, \sin 2x) = 0$. Díky vzorci $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ lze tyto rovnice, stejně jako rovnici $F(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ zařadit do obecnější třídy rovnic $F(\sin x, \cos x) = 0$, o kterých pojednáme hned v následujícím odstavci.

Rovnice $\boxed{F(\sin x, \cos x) = 0}$. Úvodem zdůrazněme nevhodnost postupu, ke kterému se i zdatní žáci někdy uchylují: do rovnice dosadí $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (v lepším případě $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$), aby dostali rovnici s jednou neznámou $y = \sin x$. Kromě toho, že nová rovnice je iracionální (tj. s odmocninou), je třeba ji řešit ve dvou variantách (pro každé ze dvou znamének $\pm$) a pak pro nalezená x rozhodovat, zda jim skutečně přísluší správné ze znamének $\pm$. Rovněž úvodem podotkněme, že k řešení rovnice $F(\sin x, \cos x) = 0$ lze (teoreticky kdykoli) uplatnit *univerzální* substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, která ovšem vede k složitým rovnicím vysokého stupně, takže ji (jako krajní prostředek řešení) prakticky neprocvičujeme.

Některé rovnice $F(\sin x, \cos x) = 0$ lze upravit na součinový tvar (viz níže). Pokud nejsme úspěšní, lze před užitím univerzální substituce vyzkoušet pomocí substitucí $u = \sin x$ a $v = \cos$ převod dané rovnice na soustavu dvou rovnic

$$\text{(S)} \qquad F(u, v) = 0 \wedge u^2 + v^2 = 1,$$

zejména je-li účinná eliminační metoda, kdy z rovnice $F(u, v) = 0$ lze snadno jednu z neznámých u, v vyjádřit pomocí druhé (a toto vyjádření pak dosadit do rovnice $u^2 + v^2 = 1$). Místo takové eliminace je možné hledat nějaké „uchopitelné“ rovnice, které jsou důsledky soustavy (S). (Obě rovnice vhodně donásobit a pak je sečíst nebo odečíst apod.) Soustava S někdy rovněž připouští schůdné grafické řešení v rovině Ouv.

V řadě aplikací se objevují rovnice $\boxed{a \sin x + b \cos x + c = 0}$ s nenulovými koeficienty a, b, c (rozvažte, jak takovou rovnici snadno řešit, je-li některý z koeficientů roven nule). Pro odpovídající soustavu (S) je v tomto případě účinná jak eliminační, tak grafická metoda. Kromě toho lze využít i metodu úpravy výrazu $a \sin x + b \cos x$ do tvaru $K \sin(x + \omega)$, kde $K = \sqrt{a^2 + b^2}$ a ω je vhodné číslo (jak ho k daným a, b určíme?).

Na závěr otázky zmíníme, že mnohé goniometrické rovnice lze řešit úpravou do součinového tvaru (viz otázka 3). Úspěšnost při hledání takové úpravy závisí na aktivním osvojení celé palety goniometrických vzorců, které jsme uvedli v otázce 17.

19. Sinová věta

Sinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku (učebnice Goniometrie, str. 104–105).

Rozšířená sinová věta $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2r$ (kde r značí poloměr kružnice opsané), její obrázkový důkaz (Smýkalová: Goniometrické funkce v elementární matematice, str. 67).

Typické situace pro užití sinové věty při „řešeních trojúhelníků“ (učebnice Goniometrie, str. 106–109). Případná dvojznačnost řešení a její souvislost s větou Ssu o shodnosti trojúhelníků.

Různé vzorce pro obsah trojúhelníku (učebnice Goniometrie, str. 118 a 121).

Aplikace: Určení šířky řeky měřením z věže (učebnice Goniometrie, str. 124).

20. Kosinová věta

Kosinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku a Pythagorovu větu, kterou zobecňuje (učebnice Goniometrie, str. 110–112).

Nepovinná část: Obrázkový důkaz kosinové věty přes tři čtverce nad stranami trojúhelníku, který je i důkazem Pythagorovy věty (Smýkalová: Goniometrické funkce v elementární matematice, str. 69–70)

Typické situace pro užití kosinové věty při „řešeních trojúhelníků“ (učebnice Goniometrie, str. 109 a 113–115).

Odvození Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku metodou užití kosinové věty (Smýkalová: Goniometrické funkce v elementární matematice, str. 81–82).

Aplikace: Určení vzdálenosti dvou bodů na druhém břehu řeky měřením ze dvou bodů na prvním břehu (učebnice Goniometrie, str. 123–124).

Konec dokumentu