13. Podobná zobrazení

Teoretická část

- Podobnost – kdy jsou dva útvary podobné?
- Podobnost trojúhelníků (sss, sus, uu, Ssu)
- Podobná zobrazení, poměr podobnosti.
- Stejnolehlost jako druh podobného zobrazení, koeficient stejnolehlosti.
- Stejnolehlost kružnic, společné tečny.

Praktická část

Základní poznatky

1) Je dán obecný trojúhelník ABC. Narýsujte
   a) $\triangle A_1B_1C_1$, který je obrazem $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem stejnolehlosti 2.
   b) $\triangle A_2B_2C_2$, který je obrazem $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem v bodě B a koeficientem stejnolehlosti $-\frac{1}{2}$.

   Jaké jsou poměry podobnosti v těchto zobrazeních?

2) Je dána kružnice $k(S, r = 2{,}5\ cm)$ a body M a N s vlastností $M \in k$ a N leží uvnitř kruhu určeného kružnicí k. Narýsujte:
   a) k_1, která je obrazem k ve stejnolehlosti se středem v bodě M a koeficientem stejnolehlosti $-\frac{3}{2}$.
   b) k_2, která je obrazem k ve stejnolehlosti se středem v bodě N a koeficientem stejnolehlosti $\frac{1}{2}$.

3) Jsou dány dva body O_1 a O_2, $|O_1O_2| = 6\ cm$ a dále dvě kružnice $k_1(O_1, r_1 = 3\ cm)$, $k_2(O_2, r_2 = 1\ cm)$. Nalezněte všechny středy stejnolehlostí těchto kružnic a všechny jejich společné tečny.

Typové příklady standardní náročnosti

4) Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M, který leží uvnitř kružnice k. Bodem M veďte tětivu XY tak, aby platil vztah $|XM| : |YX| = 2 : 3$.

5) Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A, který leží vně kružnice k. Bodem A veďte sečnu p kružnice k tak, aby platil vztah$|AY| = 3|AX|$, kde X a Y jsou průsečíky přímky p s kružnicí k.

6) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno:
   a) $a : b : c = 2 : 3 : 4$ a $v_a = 5\ cm$,
   b) α, β, t_c.

7) Ostroúhlému $\triangle\ ABC$ vepište obdélník $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$, $N \in AC$ a aby platilo: $|KL| : |LM| = 3 : 4$.

8) Je dán ostrý úhel AVB a bod Q tak, že leží uvnitř tohoto úhlu. Sestrojte půlkružnici k tak, aby procházela bodem Q, dotýkala se polopřímky VA a měla průměr RP na polopřímce VB.

Rozšiřující cvičení

9) Nechť je dána přímka t a na ní bod T, dále nechť je dána kružnice k v jedné z polorovin vyťatých přímkou t. Sestrojte kružnici m, která se dotýká dané kružnice k a dané přímky t v bodě T.

Návody k řešení:

1) Poměry podobnosti jsou 2 a $\frac{1}{2}$.
2) k_1 a k_2 jsou kružnice s poměrem podobnosti $\frac{3}{2}$ a $\frac{1}{2}$.
3) Středy stejnolehlosti jsou vždy právě dva. Společné tečny jsou v zadaném příkladu právě čtyři, tedy maximální možný počet.
4) $Y \in k \cap k_1$, kde k_1 vznikne zobrazením kružnice k ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $-\frac{3}{2}$.
5) $Y \in k \cap k_1$, kde k_1 vznikne zobrazením kružnice k ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 3.
6) a) pomocný útvar … libovolný trojúhelník $A'B'C'$ s vlastností $a' : b' : c' = 2 : 3 : 4$.
   Pak hledaný $\triangle ABC$ vznikne zobrazením trojúhelníku $A'B'C'$ ve stejnolehlosti se středem v bodě $A = A'$ a koeficientem stejnolehlosti $\frac{v_a}{v_{a'}}$.
   b) obdobně přes pomocný trojúhelník a stejnolehlost se středem v bodě $C = C'$.
7) Pomocný útvar … obdélník $K_1L_1M_1N_1$ vepsaný do zadaného ostroúhlého trojúhelníku ABC tak, že $K_1L_1 \subset AB$, $N_1 \in AC$, $|K_1L_1| : |L_1M_1| = 3 : 4$. Pak hledaný obdélník $KLMN$ vznikne zobrazením obdélníku $K_1L_1M_1N_1$ ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem stejnolehlosti $\frac{|AM|}{|AM_1|}$.
8) Pomocný útvar … libovolná půlkružnice k' s vlastnostmi: dotýká se ramene VA, její průměr $R_1P_1 \in VB$.
   Pak hledaná půlkružnice k vznikne zobrazením půlkružnice k' ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem stejnolehlosti $\frac{|VQ|}{|VQ'|}$, kde $Q' \in k_1 \cap VQ$. Úloha má dvě řešení.
9) Využijte stejnolehlosti se středem v bodě dotyku kružnice hledané a zadané.