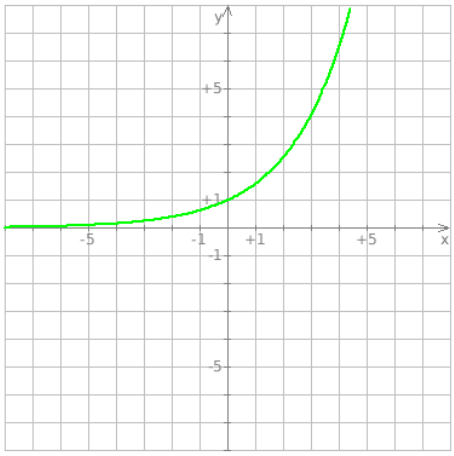
22.B Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce

1) ***Definice:***
Nechť $a \in \boldsymbol{R}^+ - \{1\}$. Funkce $f\colon y = a^x$ se nazývá exponenciální funkce se základem *a*.

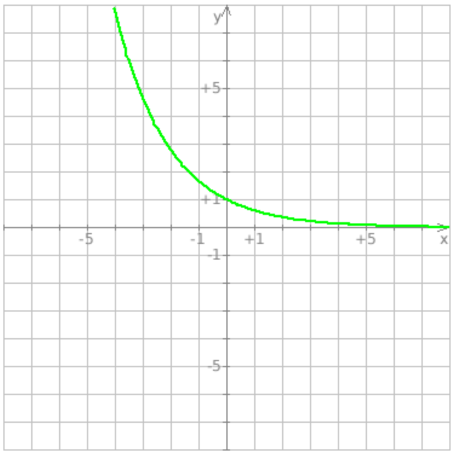
2) ***Vlastnosti:***

a) pro $a > 1$



- $D(f) = \boldsymbol{R}$
- $H(f) = \boldsymbol{R}^+$
- Je rostoucí, a tedy prostá
- $f(0) = 1$
- *f* je spojitá v $\boldsymbol{R}$
- Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa x je asymptotou grafu *f*

b) pro $0 < a < 1$



- $D(f) = \boldsymbol{R}$
- $H(f) = \boldsymbol{R}^+$
- Je klesající, a tedy prostá
- $f(0) = 1$
- *f* je spojitá v $\boldsymbol{R}$
- Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa x je asymptotou grafu *f*

Logaritmická funkce

Logaritmus je exponent, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo. Tedy:

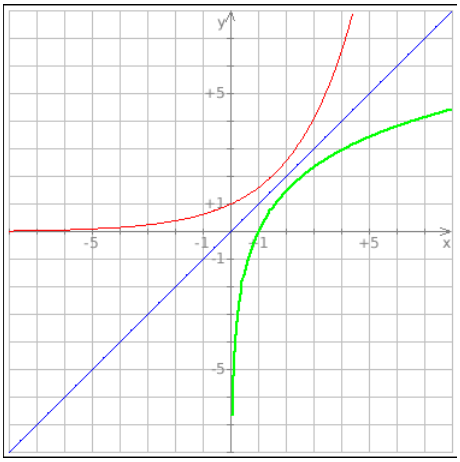
Je-li $3^2 = 9$, pak $\log_3 9 = 2$

1) ***Definice:***
Nechť $f\colon y = a^x$ je exponenciální funkce se základem $a \in \boldsymbol{R}^+ - \{1\}$. Funkce *g*, inverzní k funkci *f*, se nazývá logaritmická funkce se základem *a*. Označujeme ji $\boldsymbol{g\colon y = \log_a x}$

Pro $a = 10$ nazýváme hodnotu funkce dekadický neboli Briggsův logaritmus, pro $a = e$ přirozený logaritmus ($e \approx 2{,}718$ je Eulerova konstanta).

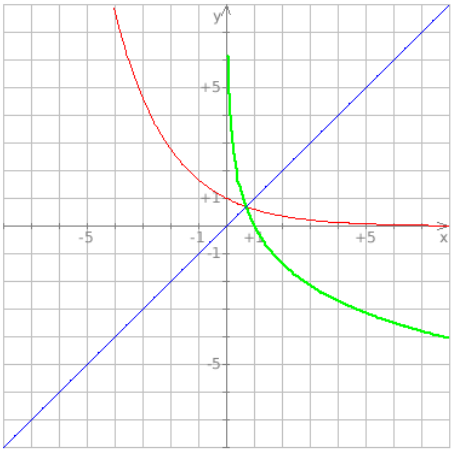
2) *Vlastnosti:*

a) pro *a > 1* (funkce *g* má zelený graf)



- *D (g) =* $\boldsymbol{R}^+$
- *H (g) =* ***R***
- Je rostoucí, a tedy prostá
- Není ani zdola omezená, ani shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa y je asymptotou grafu

b) pro *0 < a < 1* (funkce *g* má zelený graf)



- *D (g) =* $\boldsymbol{R}^+$
- *H (g) =* ***R***
- Je klesající, a tedy prostá
- Není ani zdola omezená, ani shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa y je asymptotou grafu

3) *Pravidla pro počítání s logaritmy:*

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Pro každé a, b, c $\in$ $R^+ - \{1\}$, pro každé $x_1, x_2 \in R^+$ a pro každé $r, n, y \in$ R platí:

1) $\log_a(x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a x^r = r.\log_a x$

4) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}.\log_a x$

5) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$