23.B Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální rovnice

- obsahuje neznámou v exponentu některé mocniny
- základní tvar: $\boldsymbol{a^{f(x)} = b^{g(x)}, a > 0, b > 0, x \in R}$
- řešení: a) Je-li $\boldsymbol{a = b \neq 1}$, pak $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ (rovnají-li se základy mocnin, rovnají se i exponenty)

  b) Je-li $\boldsymbol{a \neq b}$, použijeme logaritmování: $\boldsymbol{f(x).\log a = g(x).\log b}$

  Pozn.: Složitější exp. rovnice se řeší převedením na základní tvar, popřípadě na algebraickou rovnici (s častým použitím substituce $a^x = y$ $(a > 0, a \neq 1)$).

Logaritmická rovnice

- obsahuje logaritmy výrazů s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$
- nejjednodušší tvar: $\boldsymbol{\log_a x = b, a > 0, a \neq 1, b \in R}$ (její řešení podle definice logaritmu je $x = a^b$)
- řešení na základě věty: Jestliže $\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$, kde $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$, pak $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ (rovnají-li se logaritmy dvou čísel o stejném základu, rovnají se i tato čísla)

  Pozn.:1) Platnost předchozí věty je podmíněna splněním podmínek $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, zkouška je nutnou součástí řešení.

  2) Složitější log. rovnice - řešení často usnadňuje vhodná substituce (např. $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$) a převod rovnice z log. na algebraickou.

- <u>Věty o logaritmech:</u> Nechť $a > 0, a \neq 1, x_1 > 0, x_2 > 0, r \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{R}$

  1) $\log_a(x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

  2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

  3) $\log_a x^r = r.\log_a x$

  4) $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}.\log_a x$

  5) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, kde $a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$

  Pozn.: Velký význam věty 5! - Umožňuje převod logaritmu při jednom základu na logaritmus při jiném základu! (Při řešení log. rovnic je často třeba dosáhnout toho, aby všechny logaritmy v rovnici měly stejný základ!)