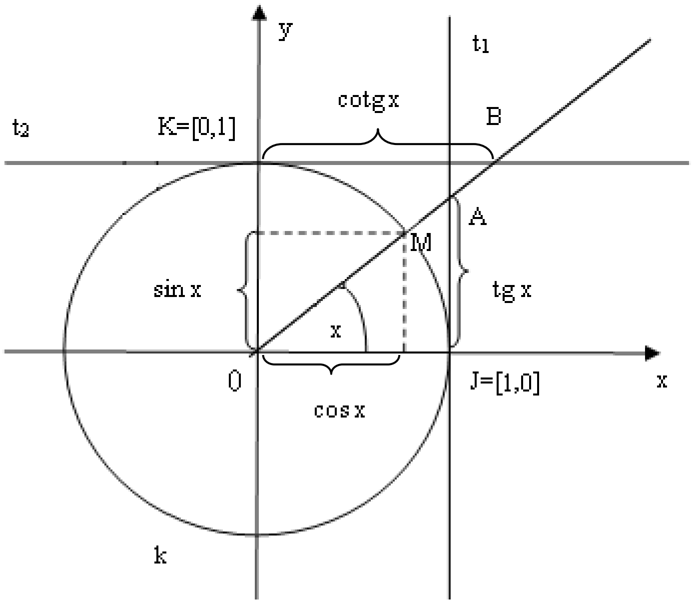
24.B Goniometrické funkce, vztahy mezi nimi

Jednotková kružnice:



Velikost úhlu určujeme

1) v míře stupňové: - jednotkový úhel je $1° = \frac{1}{180}$ přímého úhlu,

- úhly zpravidla značíme pomocí řeckých písmen (α, β, γ …)

2) v míře obloukové: - jednotkový úhel je 1rad = úhel, jehož délka oblouku *s* kružnice se rovná poloměru kružnice r,

- úhly zpravidla značíme x $\left(x = \frac{s}{r}\right)$

Převod: $$\boxed{\alpha = \frac{180}{\pi}.x}$$ $$\boxed{x = \frac{\pi}{180}.\alpha}$$

Orientovaný úhel – je úhel, který má
- vrchol v počátku soustavy souřadnic,
- ***počáteční*** rameno (v kladné poloose x)
- ***koncové*** rameno.

Jeho velikost je
- kladná, když vznikl otáčením počátečního ramene proti směru pohybu hodinových ručiček
- záporná, když vznikl otáčením počátečního ramene po směru pohybu hodinových ručiček
- pro základní velikost orientovaného úhlu platí: $0° \leq \alpha < 360°$; $0 \leq x < 2\pi$

Přehled definic a vět:

Definice: Nechť je dána kartézská soustava souřadnic v rovině 0xy a jednotková kružnic (se středem v počátku a poloměrem 1). Ke každému reálnému číslu x přiřadíme orientovaný úhel x radiánů, který umístíme v soustavě souřadnic tak, že jeho vrchol je v počátku a počáteční rameno v kladné poloose x. Koncové rameno tohoto orientovaného úhlu protne jednotkovou kružnici v jediném bodě $M[x_M, y_M]$.

Kosinus je funkce, která každému reálnému číslu x přiřadí první souřadnici bodu M, $x_M = \cos x$.

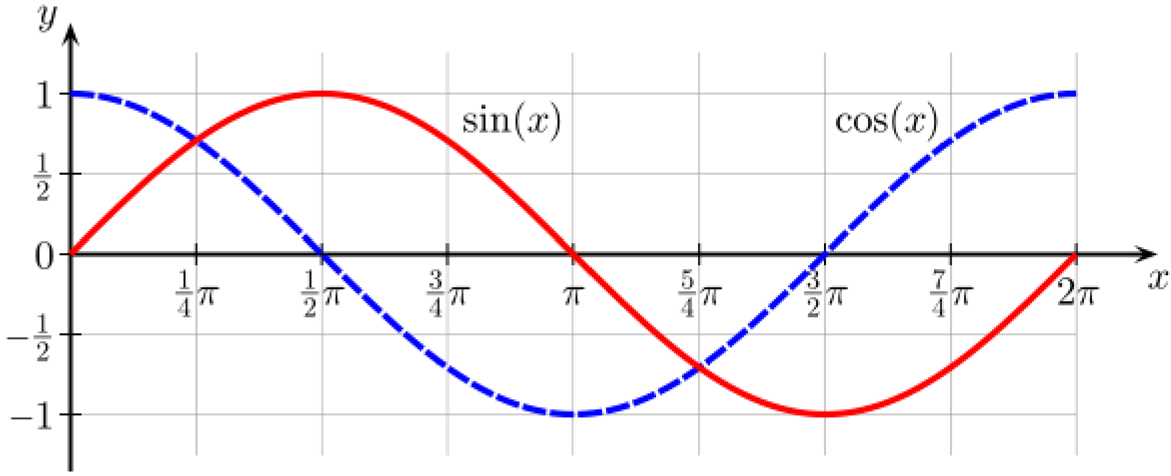
Sinus je funkce, která každému reálnému číslu x přiřadí druhou souřadnici bodu M, $y_M = \sin x$.

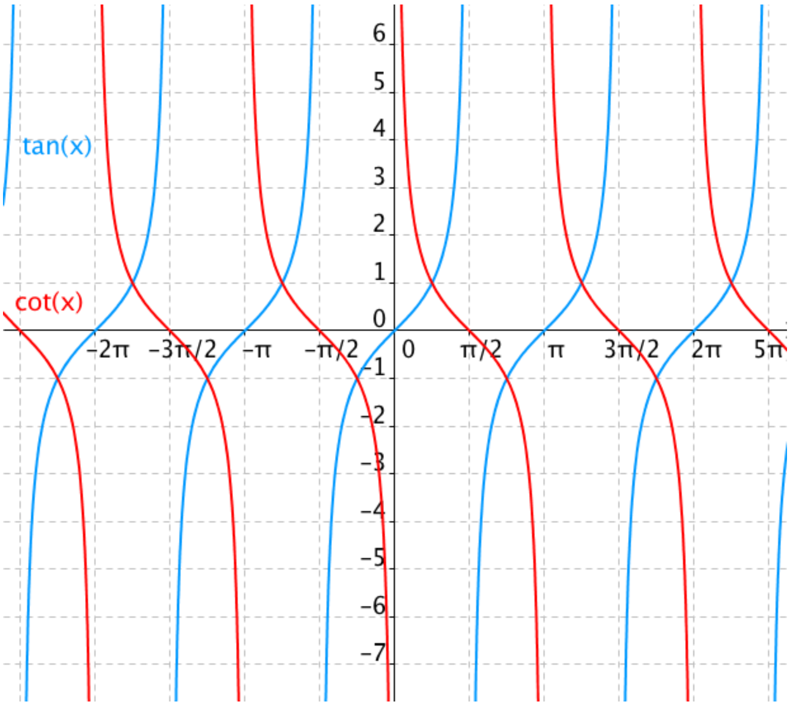
Tangens je funkce, která každému reálnému číslu x, pro které $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\ x$.

Kotangens je funkce, která každému reálnému číslu x, pro které $\sin x \neq 0$, přiřadí číslo $\frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{cotg}\ x$.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND	0
cotg α	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ND	0	ND

Grafy goniometrických funkcí:





Vlastnosti goniometrických funkcí:

- D (sin x) = D (cos x) = **R**
- D (tg x) = **R** - {(2k +1)$\frac{\pi}{2}$, k $\in$ **Z**}
- D (cotg x) = **R** - {kπ, k$\in$**Z**}
- H (sin x) = H (cos x) = $\langle -1; 1 \rangle$
- H (tg x) = H (cotg x) = **R**
- Funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π. Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π.
- Funkce kosinus je sudá, funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché.

Některé vztahy mezi goniometrickými funkcemi

- Pro každé x ϵ **R** platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Pro každé x ϵ **R** - $\left\{ x \neq k.\frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$ platí: tg x . cotg x = 1
- Pro každé x ϵ **R** platí: sin 2x = 2.sin x.cos x
- Pro každé x ϵ **R** platí: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Pozn. Při řešení goniometrických úloh se používají další vzorce uvedené v MFCHT – např.

- vzorce pro součet (rozdíl) argumentů,
- vzorce pro součet (rozdíl) funkcí,
- vzorce pro poloviční argument, …