26.B Obecný trojúhelník (trigonometrie)

Trigonometrie - oblast goniometrie, která je věnována užití goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících

Základní vztahy:

<u>Sinová věta</u>: Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \qquad \text{neboli} \qquad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

<u>Kosinová věta</u>: Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

Pozn. Kosinovou větu požíváme v případě, že je trojúhelník zadán prvky *sss* nebo sus.
Sinovou větu používáme v ostatních případech.

Některé další základní užitečné vztahy:

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí:

- Obsah Δ ABC je $S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$ (Heronův vzorec);
- Obsah Δ ABC je $S = \frac{1}{2}.ab.\sin\gamma = \frac{1}{2}.ac.\sin\beta = \frac{1}{2}.bc.\sin\alpha$

Následující vzorce jsou uvedeny pouze pro zajímavost jako příklad několika z velkého množství vzorců z oblasti goniometrie. Nepatří k základním znalostem, které by měl student gymnázia zvládnout:

- vztahy pro výpočet poloměru kružnice opsané, vepsané: $r = \frac{abc}{4S}$

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

$$r = \frac{ab}{2v_c}$$

$$\rho = \frac{S}{s}$$

$$\rho = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2}$$

- některé další vztahy: $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad ; \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$ (Mollweidovy vzorce)

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$$ (tangentová věta)