33.B Limita posloupnosti, nekonečné řady

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu $a \in \boldsymbol{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme pak: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Tudíž: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\ \big(\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon\big)}$

- Posloupnost, jejíž limitou je reálné číslo $\boldsymbol{a}$, se nazývá **konvergentní**. (Říkáme také, že posloupnost konverguje k číslu $\boldsymbol{a}$.)
- Posloupnost, která nemá limitu nebo jejíž limita je rovna ±∞, se nazývá **divergentní**.
- Každá posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Pozn.: a) Každá konstantní posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (c)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

b) Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.
Každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

c) Každá konvergentní posloupnost je shora i zdola omezená.
!!*Obrácená věta neplatí* … viz např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$!!

Věty o limitách

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti s limitami $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde *a*, *b*∈ ***R***.
Nechť je dána konstanta c∈ ***R***.

Pak platí:

1. Posloupnosti $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $pro\ b \neq 0$ a $(c . a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou rovněž konvergentní.

2. Limity uvedených posloupností se určí takto:

- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a . b}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\quad pro\ b \neq 0}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(c . a_n) = c . \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c . a}$

Pozn.: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Nekonečné řady

Nekonečná řada vznikne z nekonečné posloupnosti vložením znamének + mezi všechny členy posloupnosti.

Tedy: Nekonečná posloupnost ….. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$

Nekonečná řada …………… $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Nabízí se otázka, zda a za jakých podmínek má smysl uvažovat o součtu nekonečné řady.

Vytvořme (pro danou nekonečnou řadu) tzv. ***posloupnost částečných součtů*** $(s_n)_{n=1}^{\infty} = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$:

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
…….
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$
………

Pokud existuje vlastní limita s této posloupnosti částečných součtů při n $\to \infty$, tedy pokud $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak říkáme, že je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergentní**, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Je-li navíc nekonečná řada **geometrická**, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 . q^{n-1}$, pak je konvergentní právě tehdy, když platí: $|q| < 1$. Pak se součet této řady vypočítá podle jednoduchého vzorce $\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$.

$$\left(s = \lim_{n\to\infty} a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 . q^n}{q-1}}_{\text{konverguje, a to k nule, pouze pro } |q| < 1} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} \right)$$