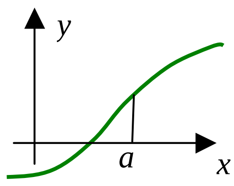
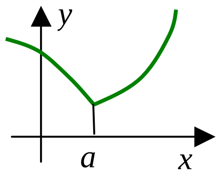
34.B Spojitost funkce, limita funkce

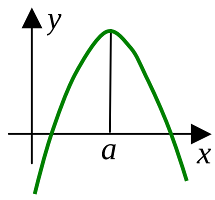
<u>Spojitost funkce</u>

Celá řada úloh z diferenciálního počtu souvisí s pojmem „**spojitost** funkce *f* v daném bodě *a*“.

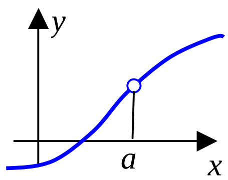
Příklady grafů funkcí v bodě *a* **spojitých** (graf „plynule prochází“ přes bod, jehož x-ová souřadnice je *a*) :

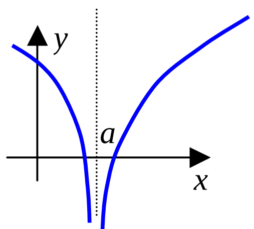


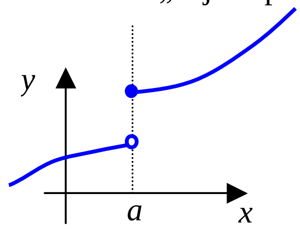




Příklady grafů funkcí v bodě *a* **nespojitých** (graf je v bodě s x-ovou souřadnicí *a* „nějak“ přerušen):



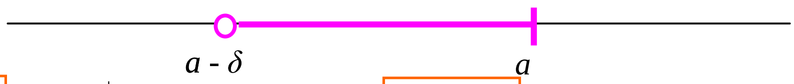




V definici spojitosti (a také limity) funkce se používá *okolí bodu a:*

- δ-okolím bodu *a* (δ ∈ R^+) nazveme otevřený interval (*a* – δ; *a* + δ), tedy množinu všech x, pro něž platí: $|\mathbf{x}-a|<\delta$

- levým δ-okolím bodu *a* (δ ∈ R^+) nazýváme interval $(a-\delta\,;a\rangle$



- pravým δ-okolím bodu *a* (δ ∈ R^+) nazýváme interval $\langle a;a+\delta)$

Def.: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě *a*, jestliže:

1. je definovaná v nějakém okolí bodu *a* (včetně samotného bodu *a*)
2. ke každému ε-okolí bodu *f(a)* existuje δ-okolí bodu *a* tak, že pro všechna *x* z δ-okolí bodu *a* patří funkční hodnoty *f(x)* do ε-okolí bodu *f(a)*

Tedy: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě *a*, jestliže

1. je v bodě *a* definovaná
2. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x:|x-a|<\delta)(|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

Věty o spojitosti funkce v bodě:

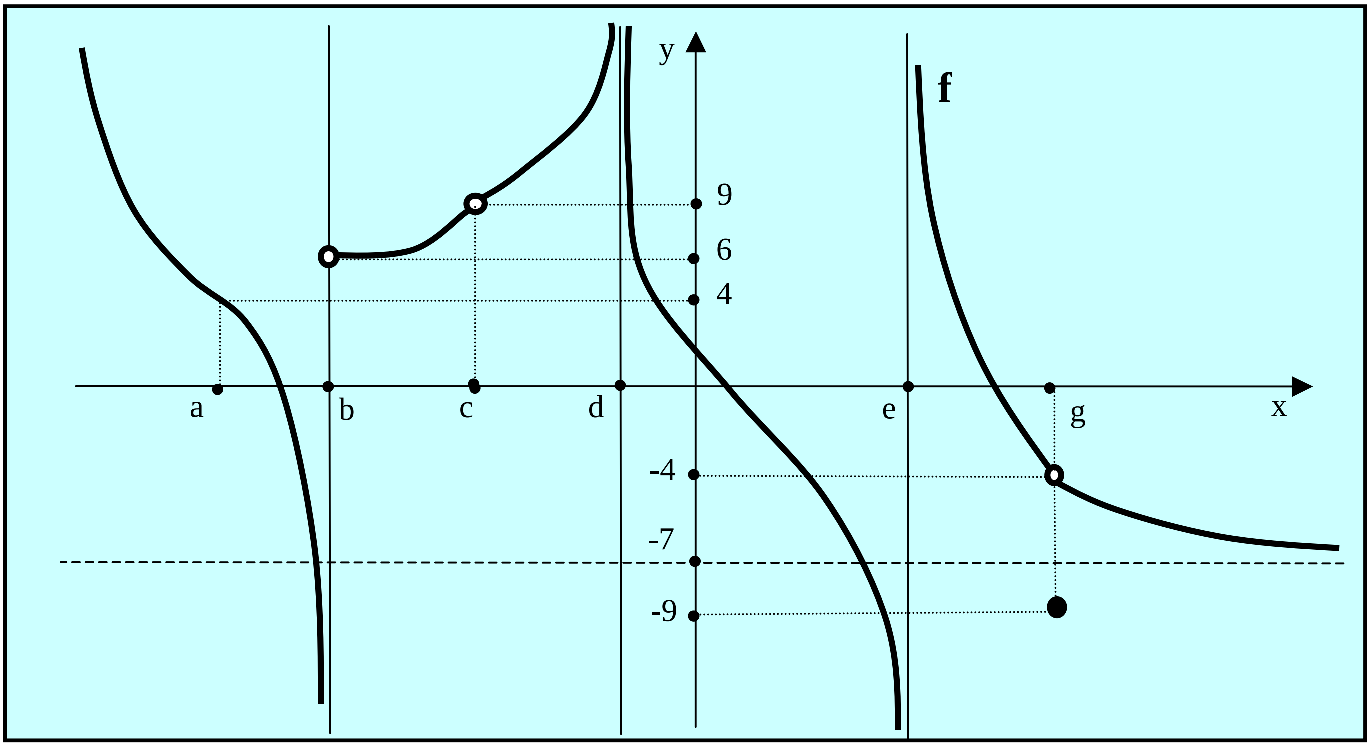
Jsou-li funkce *f(x)* a *g(x)* spojité v bodě *a*, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

a) *f(x) + g(x)*
b) *f(x) – g(x)*
c) *f(x) . g(x)*
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad pro\; g(a)\neq 0$

V každém bodě x∈ R jsou spojité funkce $\boxed{f(x)=c}$, $\boxed{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots a_1x+a_0}$, $\boxed{f(x)=\sin x}$, $\boxed{f(x)=\cos x}$, …

Limita funkce

Limita funkce v daném bodě a je (intuitivně) číslo L, k němuž se neomezeně blízko blíží hodnoty funkce, jestliže se hodnoty argumentu neomezeně blízko blíží k a. Zápis: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L}$



Druhy limit:

Vlastní limita ve vlastním bodě: $\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=9\,,\quad \lim_{x\to g} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a: |x-a|<\delta)(|f(x)-L|<\varepsilon)}$$

Vlastní limita v nevlastním bodě: $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=-7}$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists x_0)(\forall x>x_0: |f(x)-L|<\varepsilon)}$$

Analogicky: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $\boxed{\lim_{x\to d} f(x)=\infty}$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall K)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a: |x-a|<\delta)(f(x)>K)}$$

Analogicky: $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall K)(\exists x_0)(\forall x<x_0)(f(x)>K)}$$

Analogicky: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Jednostranné limity: a) vlastní limita zleva: $\boxed{\lim_{x\to c^-} f(x)=9,\ \lim_{x\to g^-} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(a-\delta;a))(|f(x)-L|<\varepsilon)}$$

b) vlastní limita zprava: $\boxed{\lim_{x\to b^+} f(x)=6,\ \lim_{x\to g^+} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(a;a+\delta))(|f(x)-L|<\varepsilon)}$$

c) nevlastní limita zleva: $\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x)=\lim_{x\to e^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to d^-} f(x)=\infty}$

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall K)(\exists\delta>0)(\forall x\in(a-\delta;a))(f(x)>K)}$$

Analogicky: ostatní nevlastní jednostranné limity

Věty o limitách:

- Funkce $f{:}y = f(x)$ má v každém bodě a nejvýš jednu limitu.
- Jestliže je funkce $f{:}\ y = f(x)$ v bodě a spojitá, pak platí: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

  Př.: $\lim_{x \to 4}(3x-5)=7$

- Nechť jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$ a nechť pro všechna $x \neq a$ z jistého δ-okolí bodu a platí: $f(x) = g(x)$. Má-li funkce $g(x)$ v bodě a limitu L, tedy $\lim_{x \to a} g(x)=L$, pak má v bodě a limitu i funkce $f(x)$ a platí: $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} g(x)=L$.

  Př.: $\lim_{x \to 3}\frac{x^2+4x-21}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{(x+7).(x-3)}{x-3}=\lim_{x \to 3}(x+7)=10$

- Jestliže pro každé $x \neq a$ jistého δ-okolí bodu a platí: $g(x) < f(x) < h(x)$ a jestliže existují limity $\lim_{x \to a} g(x)=\lim_{x \to a} h(x)=L$, pak existuje také limita $f(x)$ a platí: $\lim_{x \to a} f(x)=L$.

  (Pozn. Tuto větu lze použít např. pro důkaz, že $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1$*)*

- Nechť jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají limitu v tomtéž bodě a. Nechť platí: $\lim_{x \to a} f(x)=L$ a $\lim_{x \to a} g(x)=M$. Pak mají v tomto bodě limitu i funkce představující jejich součet, rozdíl, součin a pro $M \neq 0$ i podíl a platí:
  1. $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))=L+M$
  2. $\lim_{x \to a}(f(x)-g(x))=L-M$
  3. $\lim_{x \to a}(f(x).g(x))=L.M$
  4. $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$

- L´Hospitalovo pravidlo: Pokud je splněna jedna z podmínek a) $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} g(x)=0$ b) $\lim_{x \to a}|f(x)|=\lim_{x \to a}|g(x)|=\infty$, a jestliže existuje $\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

  Př.: $\lim_{x \to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}=\lim_{x \to 3}\frac{2x-2}{2x-4}=\frac{2.3-2}{2.3-4}=\frac{4}{2}=2$

- Limita polynomické lomené funkce v nevlastních bodech – řešení užitím vytýkání nejvyšší mocniny proměnné: Př.:

  1. $$\lim_{x \to \infty}\frac{7x^5-2x^3}{8x^6+15}=\lim_{x \to \infty}\frac{x^5.\left(7-\frac{2}{x^2}\right)}{x^6.\left(8+\frac{15}{x^6}\right)}=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}.\lim_{x \to \infty}\frac{7-\frac{2}{x^2}}{8+\frac{15}{x^6}}=0.\frac{7}{8}=0$$
  2. $$\lim_{x \to \infty}\frac{7x^5-2x^3}{8x^5+15}=\lim_{x \to \infty}\frac{x^5.\left(7-\frac{2}{x^2}\right)}{x^5.\left(8+\frac{15}{x^5}\right)}=\lim_{x \to \infty}\frac{7-\frac{2}{x^2}}{8+\frac{15}{x^6}}=\frac{7}{8}$$
  3. $$\lim_{x \to \infty}\frac{-7x^8-2x^3}{8x^5+15}=\lim_{x \to \infty}\frac{x^8.\left(-7-\frac{2}{x^5}\right)}{x^5.\left(8+\frac{15}{x^5}\right)}=\lim_{x \to \infty}x^3.\frac{-7}{8}=\infty.\left(-\frac{7}{8}\right)=-\infty$$