36.B Neurčitý integrál a určitý integrál

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Proces **integrování** funkce je opačný k procesu **derivování** funkce.

$$\text{Primitivní funkce } F\text{: } y = x^3 \quad \underset{\text{Integrování - hledám primitivní funkci}}{\overset{\text{Derivování - hledám derivaci}}{\rightleftarrows}} \quad \text{Derivace } F' = f\text{: } y = 3x^2$$

Je-li $F(x)$ funkce primitivní k funkci $f(x)$, pak platí: $F'(x) = f(x)$. Vzhledem k tomu, že přičtení jakékoliv konstanty k funkci F její derivaci nezmění, (tzn. $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$), je funkce $F(x) + C$ rovněž funkcí primitivní k $f(x)$. Evidentně tedy k dané funkci $f(x)$ existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se vzájemně o konstantu. Grafy všech těchto primitivních funkcí vzniknou z grafu jednoho parciálního řešení rovnoběžným posunutím podél osy y.

Př.: Daná funkce	Některé k ní primitivni funkce
$f: y = 3x^2$	$F_1: y = x^3,\ \ F_2: y = x^3 + 11,\ \ F_3: y = x^3 - 45, \ldots$

Neurčitý integrál funkce $f(x)$ představuje **parametrický systém všech** (nekonečně mnoha) **primitivních funkcí** k dané funkci $f(x)$. Píšeme: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

$\int$ …. integrační znak

f …. integrand neboli integrovaná funkce

x …. integrační proměnná

dx …. diferenciál

$F(x)$…. primitivní funkce

C …. integrační konstanta

Tabulka některých primitivních funkcí:

funkce	její primitivní funkce	x z intervalu
$y = x^n,\ \ x \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-\infty; \infty)$
$y = x^r,\ x > 0,\ r \in \boldsymbol{R},\ r \neq -1,$	$y = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$(0; \infty)$
$y = c$	$y = cx$	$(-\infty; \infty)$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$	$(-\infty; \infty)$
$y = \cos x$	$y = \sin x$	$(-\infty; \infty)$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = -\ln \cos x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y = \ln \sin x$	$(2k\pi; (2k+1)\pi)\ ,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln x$	$(0; \infty)$
$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$
$y = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = \mathrm{cotg}\, x$	$(2k\pi; (2k+1)\pi)\ ,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$y = e^x$	$y = e^x$	$(-\infty; \infty)$
$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$(-\infty; \infty)$
$y = \ln x$	$y = x.(\ln x - 1)$	$(0; \infty)$

Výpočet neurčitých integrálů:

1. **Přímou integrací** s případným využitím vlastností

a) $\int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx$ …. konstanta se vynáší před znak integrálu

b) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ … integrál součtu (rozdílu) se rovná součtu (rozdílu) integrálů

Př.: $\int (5.\cos x + x^3)\,dx = 5.\int \cos x\,dx + \int x^3 dx = 5.\sin x + \frac{x^4}{4} + C$

2. **Substituční metodou** – je založena na souvislosti s derivací složené funkce a používá se pro výpočet integrálů typu $\int g(f(x)).f'(x)dx$ nebo $\int \frac{f'(x)}{g(f(x))}dx$.

Princip: $\int g(f(x)).f'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(f(x)) + C$	$f(x) = t$ $f'(x)dx = dt$

Př. 1) $\int \sin^3 x.\cos x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$ — $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

2) $\int \frac{dx}{(5x+12)^3} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{(5x+12)^3} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{5}\int t^{-3}dt =$ — $5x + 12 = t$, $5dx = dt$

$= \frac{1}{5}.\frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{10.t^2} + C = -\frac{1}{10.(5x+12)^2} + C$

3. **Metodou per partes** – je založena na souvislosti s derivací součinu:

$$\underbrace{(u\,.\,v)' = u'.\,v + u\,.\,v'}$$

$\Downarrow$ integrací

$$\underbrace{\int (u.v)'dx}_{uv} = \int u'.v\,dx + \int u.v'dx \Longrightarrow \boxed{\int u.v'\,dx = uv - \int u'.v\,dx}$$

Př.: $\int \underbrace{x}_{u}.\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx = x.\sin x - \int \sin x\,dx = x.\sin x + \cos x + C$

u = x
v´ = cos x
u´ = 1
v = sin x

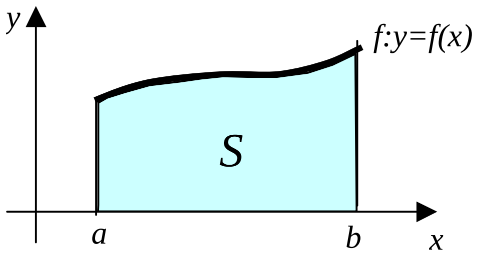
Určitý integrál

Určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ je **číslo** spojované často s obsahem plochy S „pod“ křivkou f: $y = f(x)$ v intervalu $\langle a;b \rangle$. Vypočítá se pomocí Newton – Leibnizovy formule:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

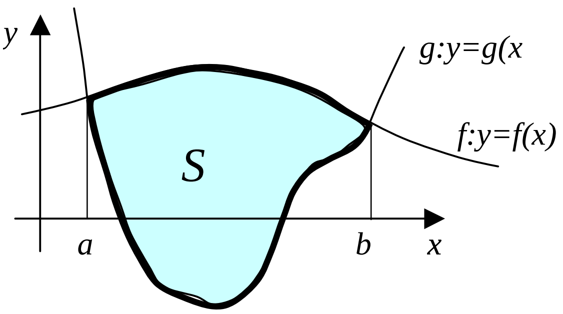
Užití určitého integrálu pro:

1. výpočet obsahu plochy *S* „pod" křivkou *f: y = f(x)*:



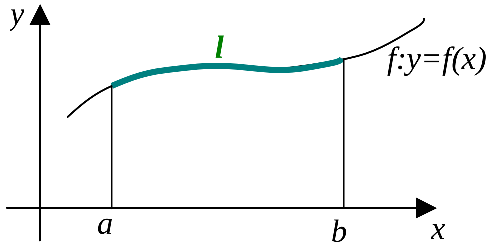
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. výpočet obsahu rovinného obrazce ohraničeného křivkami:



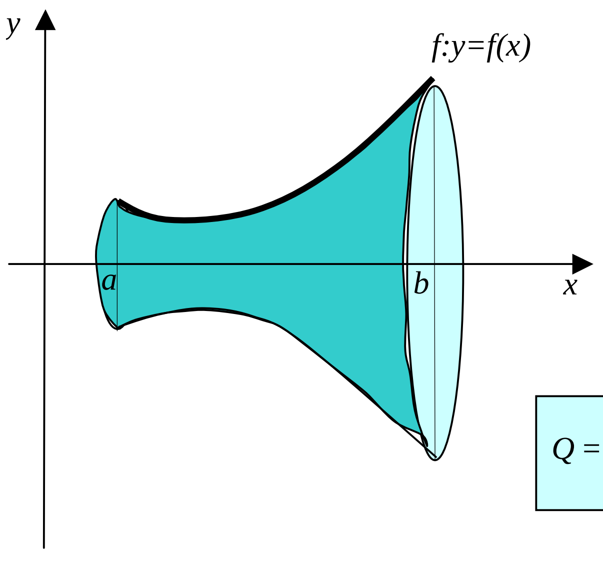
$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$

3. výpočet délky rovinné křivky:



$$\boldsymbol{l} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

4. výpočet objemu *V* a pláště *Q* rotačního tělesa:



$$V = \pi . \int_a^b f^2(x)dx = \pi . \int_a^b y^2\,dx$$

$$Q = 2\pi . \int_a^b f(x) . \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = 2\pi . \int_a^b y . \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

………