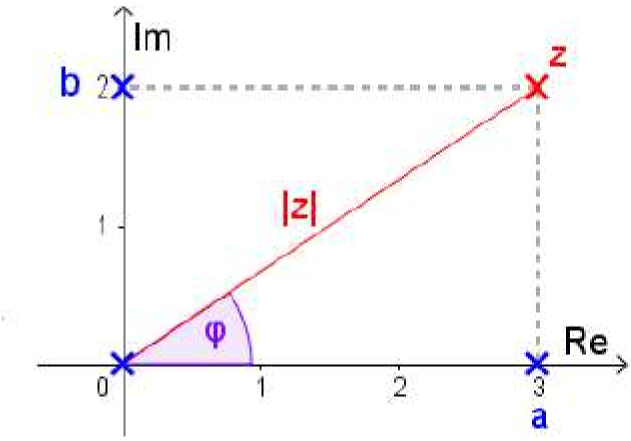
46.B Komplexní čísla

Důvody rozšíření množiny R reálných čísel do množiny C komplexních čísel:

1) úvaha o možné „rovinové“ analogii vzájemně jednoznačného zobrazení mezi všemi body na přímce a množinou reálných čísel;
2) snaha o řešení rovnic typu $x^2 = -1$, $x^2 = -16$, $x^2 = -5$, …

Komplexní číslo je uspořádaná dvojice $[a, b]$ reálných čísel. Zobrazí se jako bod v rovině: $z = [a, b]$
Číslo ***a*** se nazývá **reálná část** komplexního čísla z.
Číslo ***b*** se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z.
Množina komplexních čísel je množina **C** = **R** x **R** = $\mathbf{R}^2$.



Tvary komplexních čísel:

1) ***definiční*** tvar … $z = [a, b]$
3) ***algebraický*** tvar … $z = a + bi$,
   kde konstanta **i** se nazývá **imaginární jednotka a** je definovaná tak, aby $i^2 = -1$.
4) ***goniometrický*** tvar … $z = |z| . (\cos\varphi + i \sin\varphi)$,
   kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je absolutní hodnota z (neboli modul z)
   a pro argument φ komplexního čísla z platí: $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$.

Číslo komplexně sdružené k číslu $\boxed{z = a + bi}$ je číslo $\boxed{\bar{z} = a - bi}$.

Komplexní jednotka je takové komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je 1.

Geometrický model množiny **C** komplexních čísel je **Gaussova rovina**.

Operace s komplexními čísly:

- sčítání, odčítání a násobení … nejvýhodnější v algebraickém tvaru, kdy se s komplexními čísly pracuje stejně jako s polynomy (s využitím $i^2 = -1$)

  Př.: $\boxed{z_1 = 7 + 2i,\ z_2 = 4 + 3i}$;
  $z_1 + z_2 = 11 + 5i$,
  $z_1 - z_2 = 3 - i$,
  $z_1 . z_2 = (7 + 2i) . (4 + 3i) = 28 + 29i + 6i^2 = 22 + 29i$

- dělení … výhodné v algebraickém tvaru (s užitím rozšíření zlomku číslem $\bar{z}$)

  Př.: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7+2i}{4+3i} = \frac{7+2i}{4+3i} . \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{28-13i-6i^2}{16-9i^2} = \frac{34-13i}{25} = \frac{34}{25} - \frac{13}{25}i$$

- násobení a dělení …. v goniometrickém tvaru

Je-li $z_1 = |z_1|.(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|.(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$, pak

$$z_1 . z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

- umocňování a odmocňování … v goniometrickém tvaru

Při výpočtu mocniny komplexního čísla s přirozeným mocnitelem se používá

Moivreova věta: $(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$

- umocňování: Je-li $z = |z|.(\cos\varphi + \sin\varphi)$, pak $z^n = |z|^n.(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$
- odmocňování: Nechť je dané komplexní číslo $a = |a|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$ a $n \in \mathbf{N}$.

Pak $\sqrt[n]{a} = z \Leftrightarrow z^n = a$ ($z = |z|.(\cos x + \sin x)$ je hledaná n-tá odmocnina)

$$\Downarrow$$

$$|z|^n.(\cos nx + i.\sin nx) = |a|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$|z|^n = |a| \quad \wedge \quad nx = \alpha + 2k\pi, \ k \in Z$$

$$\Downarrow$$

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad \wedge \quad x = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

V množině **C** komplexních čísel představuje n-tou odmocninu z daného komplexního čísla ***a*** množina *n* komplexních čísel $z_k = \sqrt[n]{|a|}.\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$,

kde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Obrazy všech těchto čísel z_k leží ve vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$.

Binomická rovnice je rovnice typu $p.z^n + q = 0$, kde $p \neq 0$, $p, q \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$.

Řešení binomické rovnice: $z^n = -\frac{p}{q} \Rightarrow z = \sqrt[n]{-\frac{p}{q}}$

.

Kvadratická rovnice v množině C je rovnice typu $a.z^2 + b.z + c = 0$, kde $a, b, c \in$ C, $a \neq 0$.

Způsoby řešení:

- pomocí diskriminantu
- převedením na binomickou rovnici
- zápisem neznámé v algebraickém tvaru z = x + yi … porovnáním reálné a imaginární

části rovnice převedeme kvadratickou rovnici v **C** na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v $\mathbf{R}^2$.

Pozn.: 1) V množině C nelze uspořádat čísla podle velikosti, neplatí tam pojmy „větší“, „menší“.
2) V množině C neexistuje pojem kladného či záporného čísla.
3) V množině C platí $|z|^2 = z.\bar{z}$. ($a^2 = |a|^2$ platí pouze v **R**, nikoliv však v **C**)
4) V množině C lze rozložit $x^2 + y^2 = (x + yi).(x - yi)$
………..