22. Exponenciální a logaritmické funkce

Teoretická část

- Rovnice a grafy exponenciálních a logaritmických funkcí.
- Jejich vlastnosti, např. definiční obor logaritmické funkce.
- Souvislost mezi nimi – jsou to vzájemně inverzní funkce.
- Dekadický a přirozený logaritmus.
- Pravidla pro počítání s logaritmy.

Praktická část

Základní poznatky

1. Sestrojte grafy funkcí (můžete pro porovnání do jednoho obrázku)
   a) $f_1: y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ $\left[[0;1] \in f_1,\ \left[1;\frac{5}{2}\right] \in f_1, \left[-1;\frac{2}{5}\right] \in f_1, \dots\right]$
   b) $f_2: y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ $\left[[0;1] \in f_2,\ \left[1;\frac{2}{5}\right] \in f_2, \left[-1;\frac{5}{2}\right] \in f_2, \dots\right]$
2. Sestrojte grafy funkcí (můžete pro porovnání do jednoho obrázku)
   a) $f_1: y = \log_{\frac{5}{2}} x$ $\left[[1;0] \in f_1,\ \left[\frac{5}{2};1\right] \in f_1, \left[\frac{2}{5};-1\right] \in f_1, \dots\right]$
   b) $f_2: y = \log_{\frac{2}{5}} x$ $\left[[1;0] \in f_2,\ \left[\frac{2}{5};1\right] \in f_2, \left[\frac{5}{2};-1\right] \in f_2, \dots\right]$
3. Vypočítejte bez užití kalkulačky
   a) $\log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0{,}04$ $[3]$
   b) $25^{\log_{25} 5} + 11^{\log_{11} 7}$ $[12]$
   c) $\log_2 \log_3 81$ $[2]$
4. Spočtěte bez použití kalkulačky
   a) $2\log 4 + \log 3 - \log 6 + 1$ $[\log 80]$
   b) $\ln 4 + \ln\frac{1}{3} - 2(\ln 2 + \ln\frac{1}{4})$ $\left[\ln\frac{16}{3}\right]$

Typové příklady standardní náročnosti

5. Porovnejte s číslem 1 pomocí grafu vhodné funkce, tj. bez použití kalkulačky:
   a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < 1\right]$
   b) $\left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}$ $\left[\left(\frac{41}{40}\right)^{0,2} > 1\right]$
   c) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2}$ $\left[\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2} < 1\right]$

6. Určete, pro která r je funkce rostoucí:

$f: y = \left(\frac{r-3}{r+2}\right)^x$ $\quad [r \in (-\infty; -2)]$

7. Určete definiční obor funkce

a) $f_1: y = log\ (x^2 - 5x + 6)$ $\quad [D(f_1) = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)]$

b) $f_2: y = \sqrt{\log \log x}$ $\quad [D(f_2) = \langle 10;\ \infty)]$

8. Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

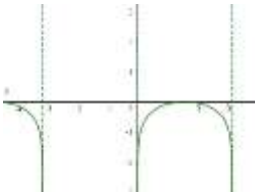
a) $f_1: y = log\ (x + 3) - 2$ $\quad \begin{bmatrix} D(f_1) = (-3; \infty), H(f_1) = R \\ [0; 0] \to [-3; -2], [1; 0] \to [-2; -2] \end{bmatrix}$

b) $f_2: y = log\ (-x + 3) + 4$ $\quad \begin{bmatrix} D(f_2) = (-\infty; 3), H(f_2) = R \\ [0; 0] \to [3; 4], [1; 0] \to [2; 4] \end{bmatrix}$

Rozšiřující cvičení

9. Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$f: y = \log \sin x$ $\quad \left[D(f) = \left(2k\pi; \pi(2k+1)\right), H(f) = (-\infty; 0\rangle\right]$



Poznámka:

Pro případné zadání exponenciálních nebo logaritmických funkcí v programech typu Geogebra nebo Wolframalpha.com a další použijte do příkazového řádku následující syntaxi:

- Exponenciální funkce $f: y = 2^x$ — f: y = 2^x
- Exponenciální funkce $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$ — f: y = (1/2)^x-3
- Logaritmické funkce $f: y = \log(x + 1)$ — f: y = lg(x+1)
- Logaritmické funkce $f: y = \log_3 x + 1$ — f: y = log(3, x)+1
- Logaritmické funkce $f: y = 2 \ln x$ — f: y = 2ln(x)

Ve Wolframalpha si nastavte funkci reálné proměnné, tj. Real-valued plot, nikoliv Complex-valued plot.