

32. Posloupnosti a jejich užití

Teoretická část

- Definice posloupnosti, způsoby zadání a vlastnosti posloupností.
- Aritmetická a geometrická posloupnost - vlastnosti, vzorce.
- Užití posloupností ve slovních úlohách, úlohy z finanční matematiky.

Praktická část

Základní poznatky:

- 1) Je dána posloupnost: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ Vyjádřete ji vzorcem pro n -tý člen a rekurentně.

$$[a_n = \frac{1}{n}; n \in N; a_1 = 1; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}; n \in N]$$

- 2) Posloupnost je zadána rekurentně: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. Určete několik jejích členů a

zadejte ji vzorcem pro n -tý člen.

$$[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; a_n = \frac{n}{n+1}]$$

- 3) a) První člen aritmetické posloupnosti je 2 a diference 3. Určete prvních pět členů posloupnosti, člen sedmdesátý a součet prvních 70 členů.

$$[2; 5; 8; 11; 14, 209, 7385]$$

- b) První člen geometrické posloupnosti je 2 a kvocient 3. Určete prvních pět členů posloupnosti, člen desátý a součet prvních 10 členů.

$$[2; 6; 18; 54; 162, 39366, 59048]$$

Typové příklady standardní náročnosti

- 4) a) Dokažte, že je posloupnost z příkladu 1) klesající.
b) Dokažte, že je posloupnost z příkladu 2) omezená.

- 5) MA Jaro 2016 V aritmetické posloupnosti platí: $a_n = \frac{5-10n}{0,4}$, $n \in N$. Jaká je diference posloupnosti? a) 12,5 b) -5 c) 5 d) -12,5 e) -25 [e]

- 6) MA Podzim 2016 Je dáno pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti: 4, x, y, z, -8. Která hodnota vyjadřuje součet x+y+z ?
a) -2 b) -3 c) -4 d) -6 e) žádná z uvedených [d]

- 7) V geometrické posloupnosti je člen $a_3 = \sqrt{3}$ a $a_5 = 2\sqrt{3}$. Určete tuto posloupnost.

$$[a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; q = \sqrt{2} \text{ nebo } a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; q = -\sqrt{2}]$$

- 8) a) V aritmetické posloupnosti je součet třetího a sedmého členu 46 a podíl druhého a šestého členu $\frac{2}{7}$. Určete tuto posloupnost. [a₁ = 3, d = 5]

- b) Geometrická posloupnost má 4 členy. Součet krajních je 56, součet vnitřních je 24.

Určete tuto posloupnost.

$$[a_1 = 2, q = 3 \text{ nebo } a_1 = 54, q = 1/3]$$

- 9) MA + 2017 Posloupnost obsahuje n po sobě jdoucích celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n , z nichž nejmenší je a_1 . Platí: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
- 1) Pro $n = 15$ vypočtěte a_1 .
 - 2) Určete n , jestliže $a_1 = -20$.
 - 3) Vyjádřete a_1 v závislosti na n a uveďte množinu všech n , pro něž daná posloupnost existuje.

$$[-6, 43, a_1 = \frac{3-n}{2}, n \text{ je liché}]$$
- 10) Roční objem výroby podniku je 50 milionů Kč. Jaký roční objem výroby lze očekávat za 5 let při 10% přírůstku ročně? [80,53 milionů]
- 11) Kolik skleněných desek pohlcujících 5 % světla musíme dát na sebe, aby intenzita světla klesla na polovinu? [14]
- 12) Osmnáctiletý kuřák utratí za cigarety ročně 17 700 Kč, což odpovídá 10 cigaretám za den, při ceně 97 Kč za krabičku cigaret.
- a) Částku 17 700 Kč uloží začátkem roku 2018 na termínovaný účet s roční úrokovou mírou 3 procenta. Daň z úroku je 15 procent. Kolik bude mít naspořeno na konci roku 2068?
 - b) Částku 17 700 Kč uloží začátkem roku 2018 na termínovaný účet s roční úrokovou mírou 3 procenta, přičemž stejnou částku bude ukládat vždy na každého úrokovacího období. Daň z úroku je 15 procent. Kolik bude mít naspořeno na konci roku 2068?
[63 928 Kč, 1 876 797 Kč]

Rozšiřující cvičení

- 13) Pan Starý má půjčku 300 000 Kč na roční úrok 4 %. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Starý splatit dluh za 5 let? [67 388 Kč]