

36. Neurčitý a určitý integrál

Teoretická část

- Definice neurčitého integrálu (primitivní funkce).
- Věty používané při výpočtu neurčitého integrálu.
- Základní integrační metody:
 - přímá metoda
 - užitím vlastností neurčitého integrálu
 - metoda per partes
 - substituční metoda
- Určitý integrál a jeho význam, metody výpočtu určitého integrálu
 - Newton - Leibnitzova formule
 - substituční metoda u určitého integrálu
 - metoda per partes u určitého integrálu
- Aplikace určitého integrálu pro výpočty obsahu plochy mezi křivkami a objemů rotačních těles.

Praktická část

Základní poznatky

1. Vypočítejte

$$\text{a) } \int (x^3 - 6x + 7) dx \quad \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 + 7x + c \right]$$

$$\text{b) } \int_0^2 (x^3 - 6x + 7) dx \quad [6]$$

2. Vypočítejte

$$\text{a) } \int \frac{x^3-1}{x-1} dx \quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c \right]$$

$$\text{b) } \int \frac{(\sqrt{x^5+2})^2}{x} dx \quad \left[\frac{x^5}{5} + \frac{8}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + 4 \ln x + c \right]$$

$$\text{c) } \int (3 \cdot 2^x - 5 \sin x + 1) dx \quad \left[\frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + 5 \cos x + x + c \right]$$

3. K dané funkci $f: y = 3x^2 - 3x + 11$ určete primitivní funkci F tak, aby její graf procházel bodem $A[2; 3]$. $[F: y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x - 21]$

Typové příklady standardní náročnosti

Vypočítejte neurčité integrály

4. Vypočítejte

$$\text{a) } \int x\sqrt{x^2+2} dx \quad \left[\frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} + c \right]$$

$$\text{b) } \int_1^2 x\sqrt{x^2+2} dx \quad [\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)]$$

5. Vypočítejte

$$\text{a) } \int 2x \sin(x^2+1) dx \quad [-\cos(x^2+1) + c]$$

$$\text{b) } \int x \cos 3x dx \quad \left[\frac{x \sin 3x}{3} + \frac{1}{9} \cos 3x + c \right]$$

6. Vypočítejte

a) $\int x e^{-x^2} dx$ $\left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right]$

b) $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$ $\left[\frac{e-1}{2e} \right]$

7. Vypočítejte

a) $\int x^4 \ln x dx$ $\left[\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \right]$

b) $\int_1^2 x^4 \ln x dx$ $[\doteq 3,20]$

8. Určete obsah útvaru ohraničeného křivkami $k_1: y = x^2$ a $k_2: y = 2 - x$. $\left[S = \frac{9}{2} j^2 \right]$

9. Vypočtěte objem komolého rotačního kužele o rozměrech $r_1 = 5 \text{ cm}$, $r_2 = 2 \text{ cm}$, $v = 4 \text{ cm}$.

$$[V = 52\pi \text{ cm}^3]$$

10. Užitím integrálního počtu odvoďte vzorec pro objem a povrch

a) koule s poloměrem r ,

b) rotačního kužele o výšce v a poloměrem podstavy r ,

c) válce o výšce v a poloměrem podstavy r .