

46. Komplexní čísla

Teoretická část

- Pojem komplexní číslo, jeho obraz v Gaussově rovině, reálná a imaginární část komplexního čísla, množina komplexních čísel.
- Tvary komplexních čísel a vzájemné převody (definiční tvar, algebraický tvar (a pojem imaginární jednotka), goniometrický tvar. Čísla komplexně sdružená.
- Absolutní hodnota komplexního čísla, její geometrický význam. Komplexní jednotka.
- Operace s komplexními čísly: sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnina a odmocnina. Moivreova věta. (Pro každou operaci použít nejvhodnější tvar čísla.)
- Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, binomická rovnice.

Praktická část

Základní poznatky

1. Zapište v algebraickém tvaru číslo $z = (5i - 1) \cdot \left(2 - \frac{i+3}{2+i}\right)$ $[1 + 8i]$
2. Zapište v goniometrickém tvaru číslo $z = \left(\frac{3-i^5}{1+3i}\right)^{10}$ $[\cos \pi + i \sin \pi]$
3. Řešte v \mathbb{C} rovnici $|z| = 1 + 2i + \bar{z}$ $[K = \left\{\frac{3}{2} + 2i\right\}]$
4. Státní maturita M+ 2016

17 U kterého výrazu platí, že jeho hodnota nepatří do oboru \mathbb{R} ?

(Číslo i je imaginární jednotka.)

A) $(2 + i)(2 - i)$

B) $\pi \cdot i^{16}$

C) $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right)^2$

D) $\left(\frac{1}{i-1}\right)^2$

E) $i + \frac{1}{i}$

[D]

Typové příklady standardní náročnosti

5. Vypočítejte
 - a) $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$ $\left[\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right]$
 - b) $|\sqrt{5} + 2 + 2i - i\sqrt{5}|$ $[3\sqrt{2}]$
6. Zjistěte, zda číslo $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je komplexní jednotka. $[ano]$

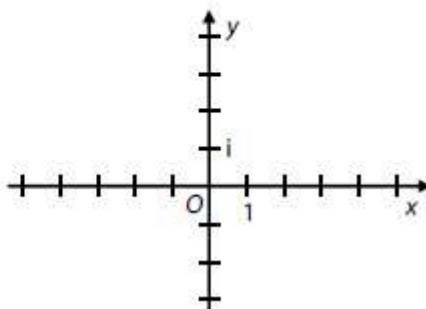
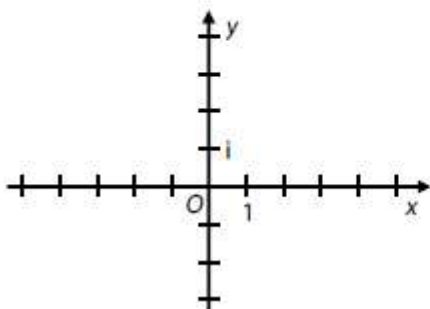
7. Státní maturita M+ 2017

10 V Gaussově rovině zobrazte množinu všech komplexních čísel z , pro něž platí:

10.1 $|z| = |-3i|$

10.2 $z + \bar{z} = -2$

(z a \bar{z} jsou komplexní sdružená čísla)



$$\begin{cases} k: x^2 + y^2 = 9, \\ p: x + 1 = 0 \end{cases}$$

8. Státní maturita M+ 2015

23 Pro každé z následujících čísel $z \in \mathbb{C}$ (23.1–23.3) rozhodněte, je-li zápis $|z + 3i| \leq 4$ pravdivý (A), či nikoli (N).

	A	N
23.1 $z = -7i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23.2 $z = -4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23.3 $z = 3 - 5i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

[A, N, A]

9. Státní maturita M+ 2014

22 Vzdálenost obrazů komplexních čísel $z = a + bi$ a $\bar{z} = a - bi$ v Gaussově rovině je 8. Obě části a, b komplexního čísla z jsou kladné. Dále platí $|z| = 8$.

Jaká je reálná část a komplexního čísla z ?

- A) $2\sqrt{3}$
- B) $4\sqrt{3}$
- C) $6\sqrt{3}$
- D) $6\sqrt{2}$
- E) $8\sqrt{2}$

[B]

10. Určete součin $u \cdot v$ a podíl $\frac{u}{v}$ komplexních čísel $u = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $v = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\left[6i, \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i \right]$$

11. Vyjádřete pomocí jednoduchého argumentu $\sin 3x$ a $\cos 3x$.

$$[3\sin x - 4\sin^3 x; 4\cos^3 x - 3\cos x]$$

12. Řešte v \mathbb{C} rci $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$.

$$[K = \{3; -3; 5i; -5i\}]$$

13. Řešte v \mathbb{C} rci $x^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$.

$$[K = \{\sqrt{3} + i; -1 + \sqrt{3}i; -\sqrt{3} - i; 1 - \sqrt{3}i\}]$$