6.B Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnicí rozumíme výrokovou formu tvaru

$ax^2+bx+c > 0;$
$ax^2+bx+c < 0;$
$ax^2+bx+c \geq 0;$
$ax^2+bx+c \leq 0,$ kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

Řešení kvadratické nerovnice:

1. POČETNĚ (převedením kvadratické nerovnice na nerovnici v součinovém tvaru)

Př. Řešte v $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{ax^2+bx+c < 0}$**,** kde $a > 0$

Řeš.: Nechť r a s jsou kořeny rovnice $ax^2+bx+c = 0$.
Pak převedeme zadanou kvadratickou nerovnici do součinového tvaru

$$a(x-r).(x-s) < 0$$

a dořešíme

- buď metodou nulových bodů s použitím číselné osy
- nebo úvahou, že $a(x-r).(x-s) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-r > 0 \wedge x-s < 0) \vee (x-r < 0 \wedge x-s > 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x > r \wedge x < s) \vee (x < r \wedge x > s) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in K_1 \vee x \in K_2$
$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2}$

Pozn. Pokud kořeny r, s neexistují, je množinou kořenů nerovnice buď množina všech reálných čísel nebo prázdná množina.

2. GRAFICKY

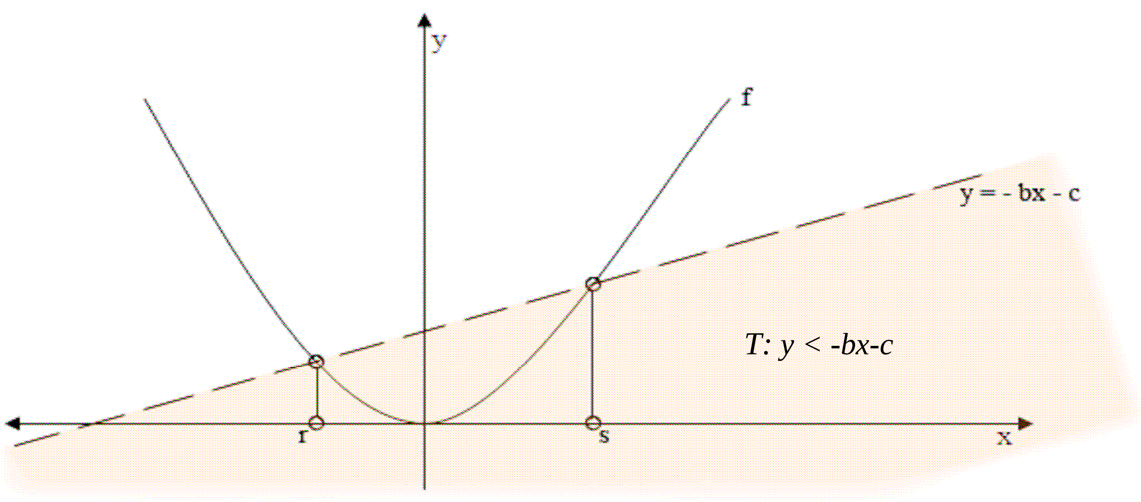
Př. . Řešte v $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{ax^2+bx+c < 0}$**,** kde $a > 0$

Řeš. (jedno z možných): $ax^2 < -bx-c$

Zavedeme funkci f: $y = ax^2$
a relaci T: $y < -bx-c$.

Znázorníme jejich grafy v soustavě souřadnic – množina kořenů je množina x-ových souřadnic všech bodů, které tvoří průnik obou grafů, tedy $\boldsymbol{K = (r, s)}$.

Pozn. Nevýhodou popsané metody je možná nepřesnost při „čtení“ průsečíků r, s .



3.KOMBINACÍ POČETNÍ A GRAFICKÉ METODY

Př. Řešte v ***R***: $\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$**,** kde $a>0$

Řeš.: Nechť r a s jsou kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$.

Pak parabola, která je grafem funkce f: $y=ax^2+bx+c$, protíná osu x v bodech $P_1[r,0]$ a $P_2[s,0]$. Pokud je podle zadání $a>0$, má funkce f minimum v bodě, který odpovídá vrcholu dotyčné paraboly.

Množina kořenů se určí podle znaménka nerovnosti v zadané nerovnici. V našem příkladu je $y=ax^2+bx+c<0$ a tomu odpovídá ***K*= (r, s)**.