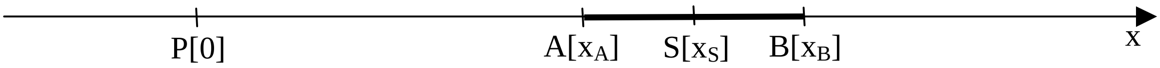
38.B Vektorová algebra

Kartézská soustava souřadnic

- *__osy__* jsou vzájemně kolmé přímky
- *__počátek__* je průsečík souřadných os
- *__jednotky__* na osách se volí zpravidla stejně velké

- Jednorozměrná soustava souřadnic

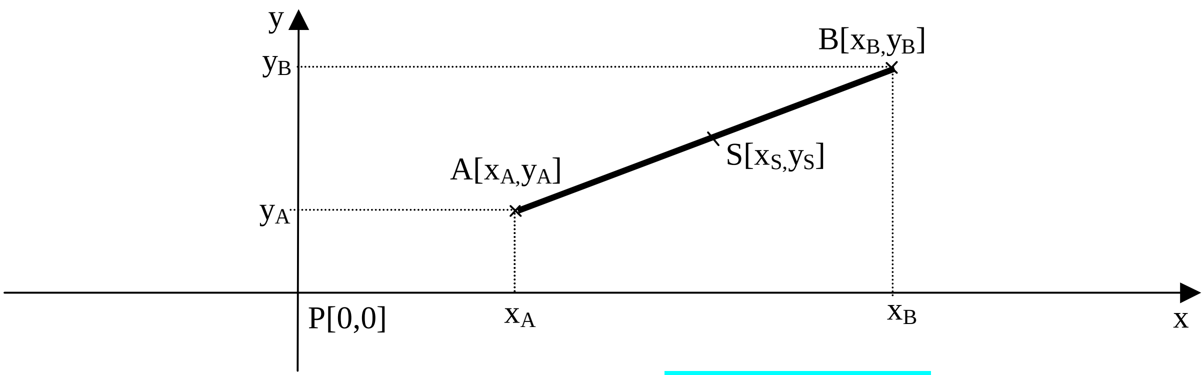
  Souřadnice bodu, délka úsečky, souřadnice středu úsečky



$$|AB| = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} \quad ; \quad S\left[\frac{x_A + x_B}{2}\right]$$

- Dvojrozměrná soustava souřadnic

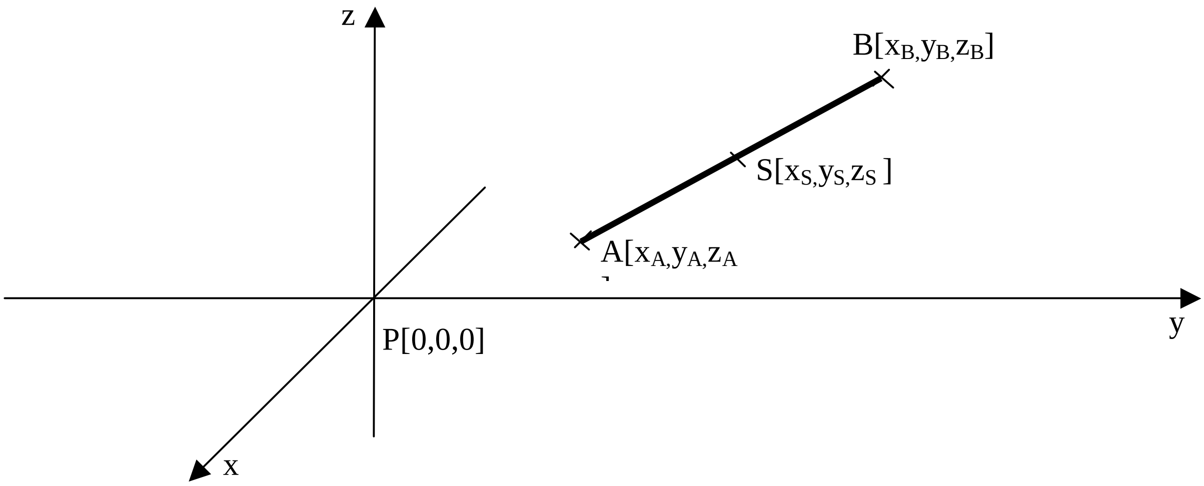
  Souřadnice bodu, délka úsečky, souřadnice středu úsečky



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad ; \quad S\left[\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right]$$

- Trojrozměrná soustava souřadnic

  Souřadnice bodu, délka úsečky, souřadnice středu úsečky



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad ; \quad S\left[\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right]$$

Orientovaná úsečka – úsečka $\overrightarrow{AB}$, jejíž krajní body mají určené pořadí (A - *počáteční bod*, B - *koncový bod*).

Velikost orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ …. $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$

Vektor $\vec{v}$ - množina všech souhlasně orientovaných úseček stejné velikosti (pozn. úplný název…*volný vektor*).

Umístění vektoru $\vec{v}$ (do bodu A) – každá orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, která je prvkem vektoru $\vec{v}$.

Pozn. 1: Místo (přesného) $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$ budeme psát (z důvodu zjednodušení) $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
Pozn. 2: Operace a vztahy mezi vektory budeme provádět prostřednictvím jejich umístění.

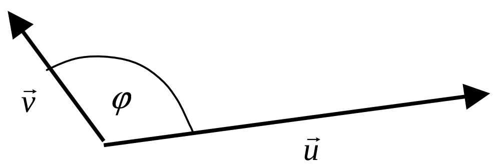
Souřadnice vektoru $\vec{v}$:

Pozn.: Vektor v rovině má dvě souřadnice, vektor v prostoru tři souřadnice.
Pojmy, vztahy a operace jsou následně uvedeny pro vektory v rovině.
Pro práci s vektory v prostoru se jen doplní třetí souřadnice a upraví vzorce..

Nechť jsou dány body $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$.
Nechť $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$.
Pak $\boxed{\vec{v} = (v_1; v_2) = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)}$

Velikost vektoru $\vec{v}$ $(v_1; v_2)$ je číslo $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je menší (nebo rovný) z úhlů určených umístěním vektorů do společného počátečního bodu … φ:



Odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ se nedefinuje, pokud alespoň jeden z nich je nulový.

Lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ je vektor $\vec{w}$, pro nějž platí:

$\boxed{\vec{w} = a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + \dots + a_n.\vec{v}_n}$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou reálná čísla.

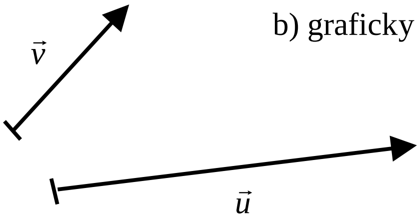
Vztahy mezi vektory:

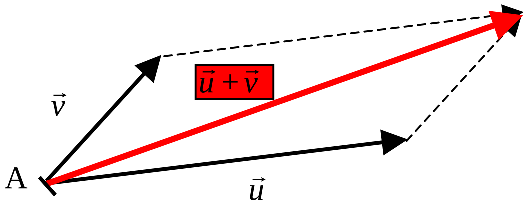
- **Rovnost vektorů**: Vektory se vzájemně *rovnají*, mají-li stejnou velikost a souhlasnou orientaci.
- **Lineární závislost vektorů**: Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže libovolný z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.
  V opačném případě jsou tyto vektory *lineárně nezávislé*.
- **Kolineárnost vektorů**: Vektory jsou *kolineární*, jsou-li rovnoběžné (příp. leží na téže přímce).
- **Komplanárnost vektorů**: Vektory jsou *komplanární*, leží-li v jedné rovině.

Operace s vektory:

- **Sčítání:** a) numericky $\vec{u}=(u_1;u_2)$ $\quad \vec{v}=(v_1;v_2)$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1;\, u_2+v_2)$

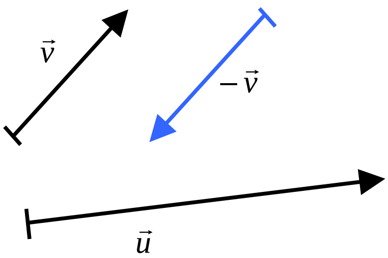
  b) graficky

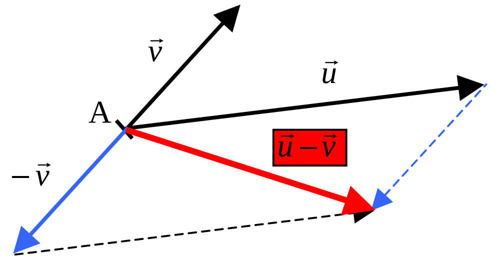




- **Odčítání:** a) numericky $\vec{u}=(u_1;u_2)$ $\quad \vec{v}=(v_1;v_2)$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1;\, u_2-v_2)$

  b) graficky

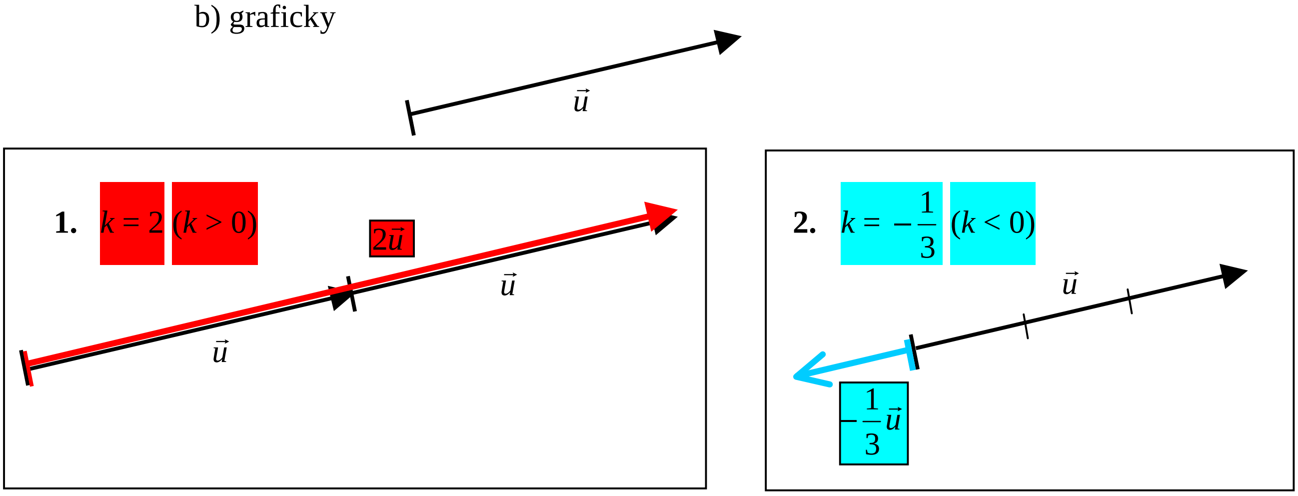




- **Násobení vektoru reálným číslem:**

  a) numericky $\vec{u}=(u_1;u_2)$**,** $\quad k\in \boldsymbol{R}$ $\qquad k.\vec{u}=(ku_1;ku_2)$

  b) graficky



- **Skalární součin:** Skalárním součinem nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je ***číslo*** $\vec{u}.\vec{v}$, které lze vypočítat dvěma způsoby: $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2}$

  $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi}$, kde φ je odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

  Skutečnost, že skalární součin lze vypočítat dvěma způsoby, umožňuje určit odchylku vektorů $\omega(\vec{u},\vec{v})=\varphi$:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

Pozn.1: Je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, pak $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Pozn.2: Jsou-li oba vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nenulové, pak $\vec{u}.\vec{v}=0$ právě tehdy, když $\vec{u}\perp\vec{v}$.

- **<u>Vektorový součin:</u>** Vektorovým součinem nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je ***<u>vektor</u>*** $\vec{w} = \vec{u}\, x\, \vec{v}$ ($\vec{u}$ *krát* $\vec{v}$), pro který platí:

  1) $\boxed{|\vec{w}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\varphi}$, kde φ je odchylka vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

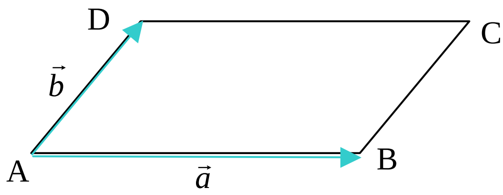
  2) Orientace vektoru $\vec{w}$ se určuje pravidlem pravé ruky a platí: $\boxed{\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}}$

  Pozn,: Je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ nulový, pak $\vec{u}\, x\, \vec{v} = \vec{0}$.

Užití vektorového součinu:

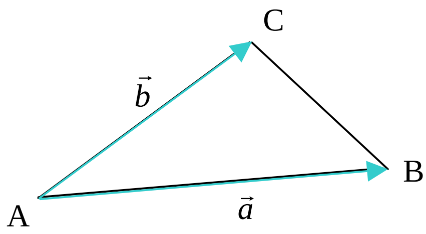
- Výpočet obsahu rovnoběžníku

$$S_{▱ABCD} = \left|\vec{a}\, x\, \vec{b}\right|$$



- Výpočet obsahu trojúhelníku:

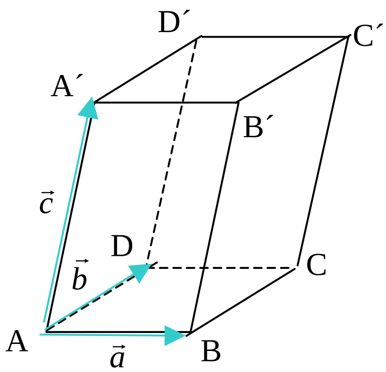
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\, x\, \vec{b}\right|$$



- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu:

$$V_{ABCDA´B´C´D´} = \left|\left(\vec{a}\, x\, \vec{b}\right).\vec{c}\right|,$$

kde $\left(\vec{a}\, x\, \vec{b}\right).\vec{c}$ je **smíšený součin** vektorů



Pozn.1: Objem čtyřbokého jehlanu ABCDA´ vepsaného do rovnoběžnostěnu je

$$V = \frac{1}{3}.\ V_{ABCDA´B´C´D´} = \frac{1}{3}.\left|\left(\vec{a}\, x\, \vec{b}\right).\vec{c}\right|$$

Pozn,2: Objem čtyřstěnu ABDA´ vepsaného do rovnoběžnostěnu je

$$V = \frac{1}{6}.\ V_{ABCDA´B´C´D´} = \frac{1}{6}.\left|\left(\vec{a}\, x\, \vec{b}\right).\vec{c}\right|$$