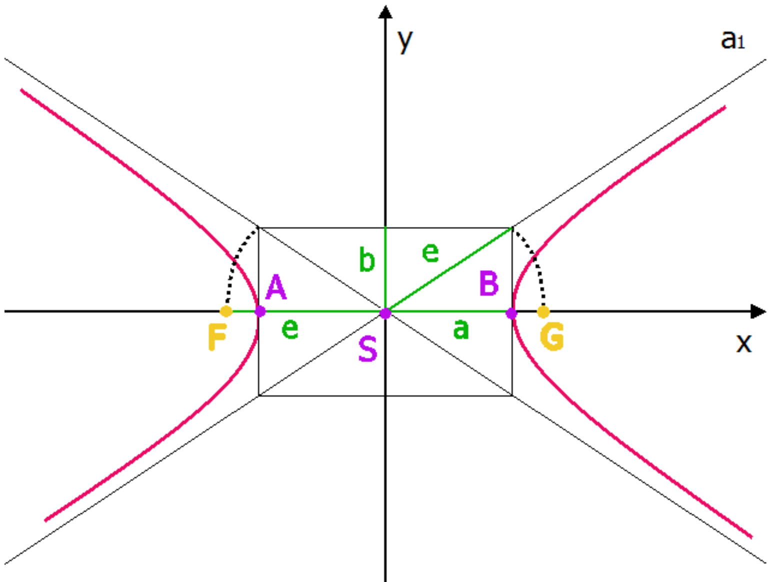
45.B Hyperbola

Hyperbola *H(F,G, 2a)* je množina všech bodů X roviny ρ, pro něž platí, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných bodů F, G (tzv. ohnisek) je konstantní a rovná se *2a*, kde *2a* je menší než vzdálenost bodů F, G.

Tedy $H(F,G,2a) = \{X \in \rho; \left||XF| - |XG|\right| = 2a,\ \text{kde } 2a < |FG|\}$



S ...střed
A, B...vrcholy
F, G...ohniska
a ...velikost hlavní poloosy
b...velikost vedlejší poloosy
e ...excentricita
a_1, a_2...asymptoty

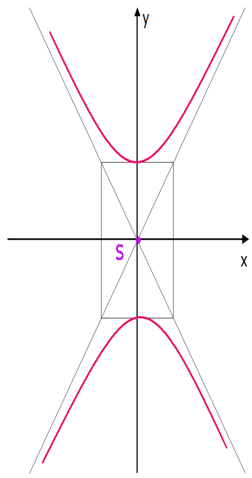
$e^2 = a^2 + b^2$

Rovnice hyperboly *H(F, G, 2a)*:

1) **Středová:**

a) S [0;0]......H: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

$\left(-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1\right)$



b) S [m;n]......H: $\boxed{\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$

$\left(-\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1\right)$

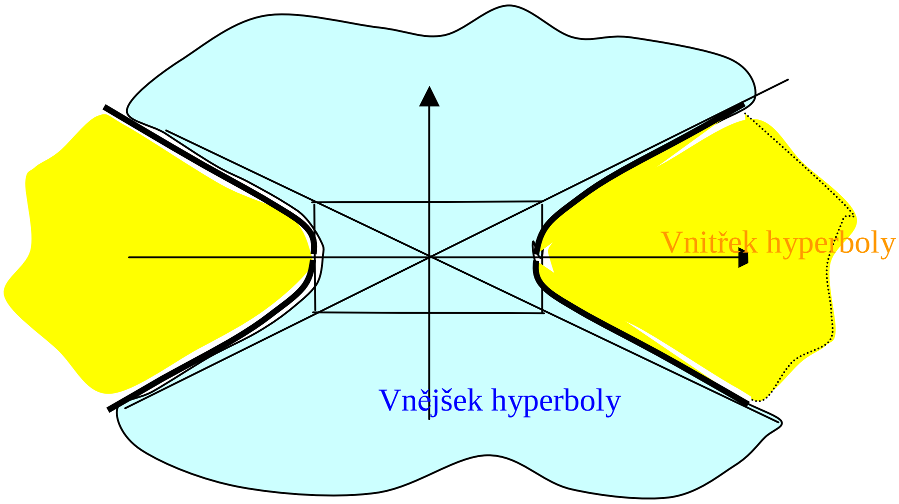
2) **Obecná:** H: $\boxed{Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0}$

A.B > 0

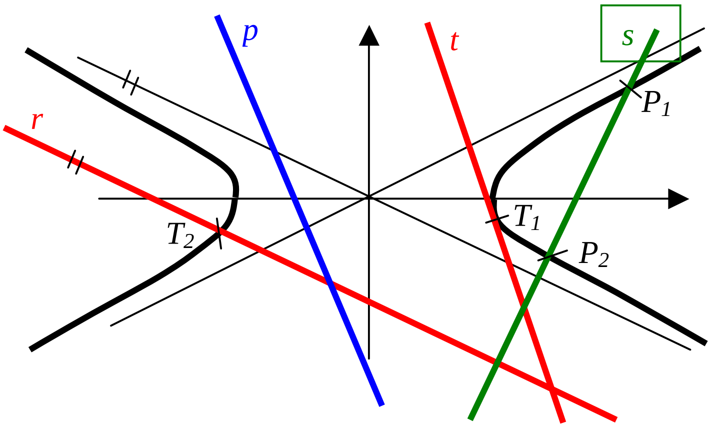
Vzájemná poloha bodu a hyperboly:

Nechť je dána hyperbola H: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a bod $M[x_M, y_M]$. Levou stranu rovnice hyperboly označíme L(x, y). Pak platí:

1) Je-li $L(x_M, y_M) = 0$, pak $M \in H$.
2) Je-li $L(x_M, y_M) > 0$, pak M leží uvnitř útvaru ohraničeného hyperbolou H.
3) Je-li $L(x_M, y_M) < 0$, pak M leží vně H



Vzájemná poloha přímky (lineárního útvaru) a hyperboly – je dána počtem společných bodů. Řeší se tedy soustava kvadratické rovnice (hyperboly) a lineární rovnice (přímky)



H: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$
p: $ax + by + c = 0$
- soustava dvou rovnic o dvou neznámých

Může nastat, že soustava má:
1) 2 řešení: $H \cap p = \{P_1; P_2\}$ … $p = s$ …*sečna*
2) 1 řešení: $H \cap p = \{T\}$ … $p = t$ …*tečna* nebo
$p = r$ … *rovnoběžka s asymptotou*
3) 0 řešení: $H \cap p = \emptyset$ … p … *vnější přímka*

Pozn.: Určujeme-li vzájemnou polohu hyperboly a některé podmnožiny přímky (úsečka, polopřímka), pak při řešení pracujeme raději s parametrickou rovnicí dané podmnožiny.

Rovnice asymptot:

a) *FG // x:* $a_{1,2}$: $y = \pm \frac{b}{a}(x-m)+n$ b) *FG // y:* $a_{1,2}$: $y = \pm \frac{a}{b}(x-m)+n$

Rovnice tečny vedené k hyperbole H*(F, G, 2a)* v jejím bodě T[x_o,y_o]:

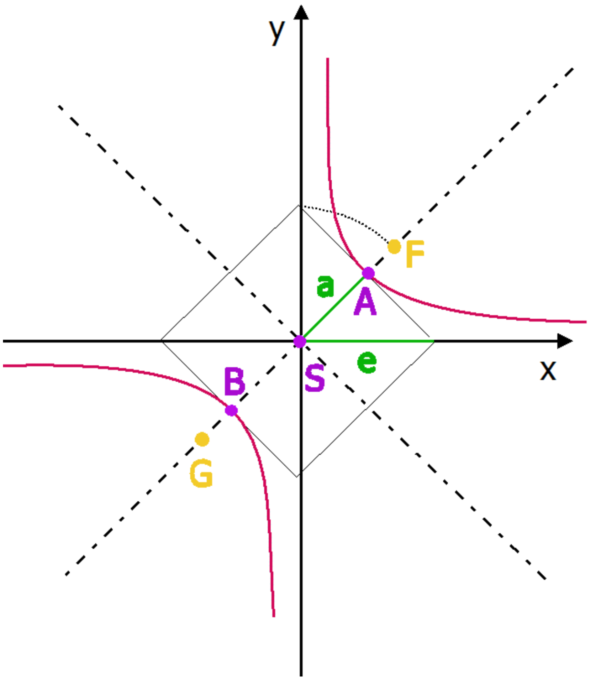
$$\boxed{\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1}$$

nebo

$$\boxed{-\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1}$$

Rovnoosá hyperbola - je hyperbola pro kterou platí, že a = b (její asymptoty jsou na sebe kolmé). Platí tedy: $a = b \rightarrow e^2 = 2a^2$

Speciální případ rovnoosé hyperboly je taková hyperbola, která má asymptoty přímo v souřadnicových osách, případně v rovnoběžkách se souřadnicovými osami.



Středová rce:

Je-li S [0;0], pak
$H: 2xy = a^2$

Je-li S [m;n], pak
$H: 2\cdot(x-m)(y-n) = a^2$