Kapitola 4

Výrazy, mocniny, odmocniny

1. Graficky vyřešte nerovnice

   a) $(-x)^6 \geq x^4$,

   b) $x^{-5} < \frac{1}{x^2}$.

2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí

$$f_1(x) = \frac{1}{|x|^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_3(x) = -\sqrt{x} \quad \text{a} \quad f_4(x) = (-x)^3,$$

   vyznačte v nich důležité body včetně případných průsečíků se souřadnicovými osami a určete jejich vlastnosti (definiční obor, obor hodnot, monotonii, extrémy, paritu). Dále rozhodněte, zda existují inverzní funkce f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1} a f_4^{-1} k funkcím f_1, f_2, f_3 a f_4. Své tvrzení zdůvodněte. Pokud ano, načrtněte rovněž jejich grafy.

3. Načrtněte grafy funkcí

   a) $f_1(x) = -2\sqrt{|x|}$,

   b) $f_2(x) = 1 - \frac{8}{(x+4)^3}$,

   c) $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$,

   vyznačte v nich důležité body včetně případných průsečíků se souřadnicovými osami a určete jejich vlastnosti (definiční obor, obor hodnot, monotonii, extrémy, paritu). Dále rozhodněte, zda existují inverzní funkce f_1^{-1}, f_2^{-1} a f_3^{-1} k funkcím f_1, f_2 a f_3. Své tvrzení zdůvodněte. Pokud ano, načrtněte rovněž jejich grafy.

4. Porovnejte čísla

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-452} \quad \text{a} \quad \frac{125^{150}}{9^{225}}.$$

   Své tvrzení zdůvodněte.

5. Usměrněte zlomek (tj. odstraňte všechny odmocniny ze jmenovatele)

$$\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

a výraz, který obdržíte, zjednodušte.

6. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž platí, že

$$(1-i)^n \in \mathbb{R}.$$

7. Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen grafy funkcí

$$f: y = x^2 \quad \text{a} \quad g: y = \sqrt{2x^3}.$$

8. Zjednodušte výraz

$$\frac{3xz - 6yz - x + 2y}{(x-y)^2 - y^2} : \frac{9xz^2 - x}{9z^2 + 6z + 1}$$

a stanovte podmínky, za nichž je definován.

9. Zjednodušte výraz

$$V(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{2x^2 - 8}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}\right) \cdot \frac{12x - 6(x+2)^2}{x^3 - 8},$$

stanovte podmínky, za nichž je definován, a najděte všechna celá čísla x, pro něž platí, že hodnota výrazu V v bodě x je rovněž celým číslem, tj. $V(x) \in \mathbb{Z}$.

10. Zjednodušte výraz

$$V(x) = 4x - \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} : \frac{x - \frac{1}{2}}{2x^2 + x - 1} - x^2,$$

stanovte podmínky, za nichž je definován, a najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí, že hodnota výrazu V v bodě x je nezáporným číslem, tj. $V(x) \geq 0$.

11. Zjednodušte výraz

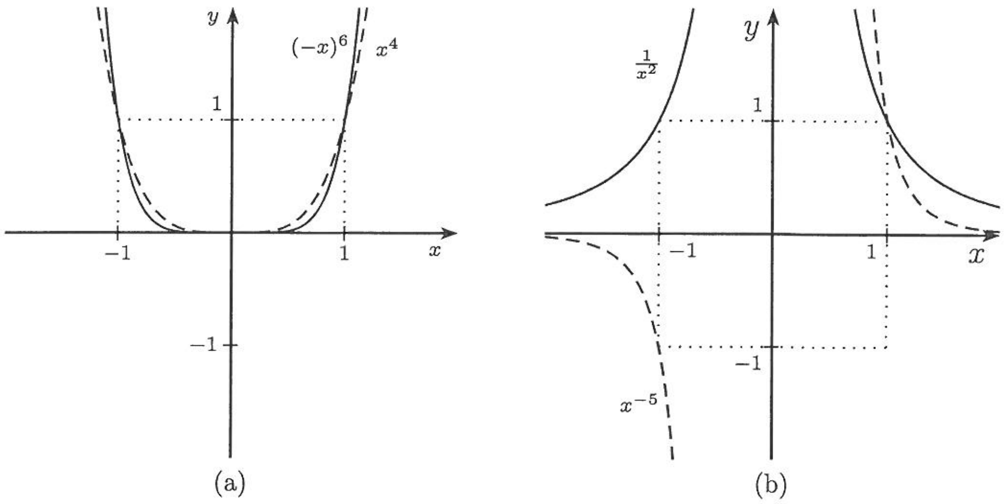
$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$$

a stanovte podmínky, za nichž je definován.

Návody a výsledky:

1. a) $K = (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$,

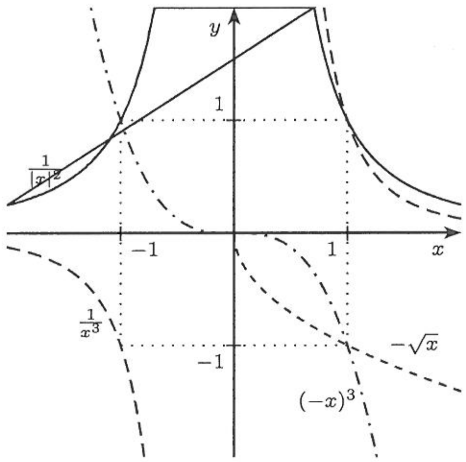
   b) $K = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.



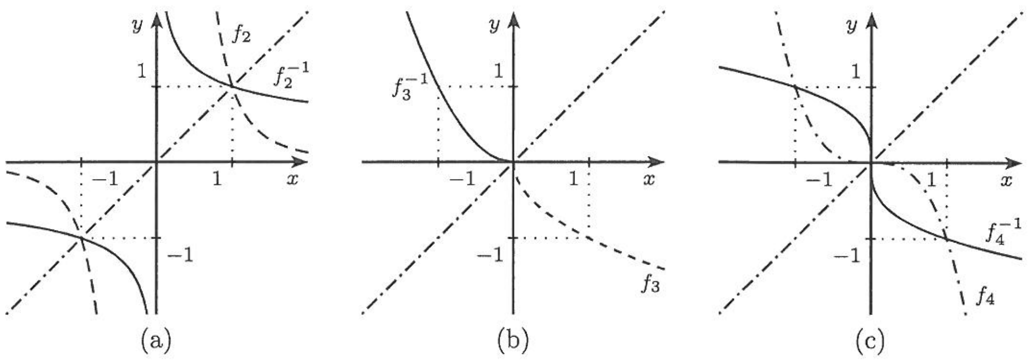
Obrázek 4.1: K řešení úlohy 1a), 1b)

2. Obecně platí, že k funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} právě tehdy, když je funkce f prostá. Pro obě funkce pak platí $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné podle přímky o rovnici $y = x$.

   - Pro funkci f_1 platí $D(f_1) = \mathbb{R} - \{0\}$, $H(f_1) = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$, v $\mathbb{R}^- = (-\infty; 0)$ je rostoucí, v $\mathbb{R}^+$ je klesající, nemá extrémy, je sudá (její graf je osově souměrný podle osy y), není prostá (např. $[-1; 1] \in f_1$ a $[1; 1] \in f_1$), proto k f_1 neexistuje inverzní funkce.
   - Pro funkci f_2 platí $D(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$, $H(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$, v $\mathbb{R}^-$ je klesající, v $\mathbb{R}^+$ je klesající, ale pozor: není klesající v $D(f_2)$, nemá extrémy, je lichá (její graf je středově souměrný podle počátku), je prostá, proto k f_2 existuje inverzní funkce $f_2^{-1} : y = 1/\sqrt[3]{x}$.
   - Pro funkci f_3 platí $D(f_3) = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0; \infty)$, $H(f_3) = \mathbb{R}_0^- = (-\infty; 0\rangle$, je klesající v $D(f_3)$, v bodě $[0; 0]$ nabývá svého maxima, není sudá ani lichá, je prostá, proto k f_3 existuje inverzní funkce f_3^{-1}, která má předpis $y = x^2$, ovšem s tím, že $D(f_3^{-1}) = H(f_3) = \mathbb{R}_0^-$ a $H(f_3^{-1}) = D(f_3) = \mathbb{R}_0^+$ – tzn. jedná se pouze o „levou polovinu“ této paraboly (včetně vrcholu).
   - Pro funkci f_4 platí $D(f_4) = \mathbb{R}$, $H(f_4) = \mathbb{R}$, je klesající v $D(f_4)$, nemá extrémy, je lichá (její graf je středově souměrný podle počátku), je prostá, proto k f_4 existuje inverzní funkce $f_4^{-1} : y = -\sqrt[3]{x}$ s tím, že skutečně platí $D(f_4^{-1}) = \mathbb{R}$ a $H(f_4^{-1}) = \mathbb{R}$, neboť lichou odmocninu můžeme uvažovat i ze záporných čísel.



Obrázek 4.2: K řešení úlohy 2



Obrázek 4.3: Inverzní funkce z úlohy 2

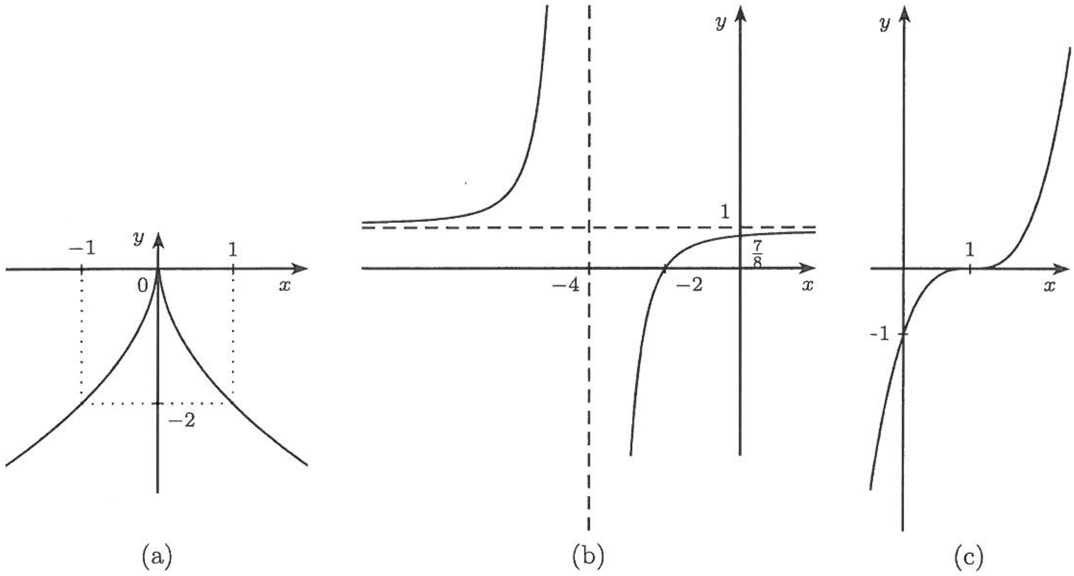
3. a) Pro funkci f_1 platí $D(f_1) = \mathbb{R}$, $H(f_1) = \mathbb{R}_0^-$, v $\mathbb{R}_0^-$ je rostoucí, v $\mathbb{R}_0^+$ je klesající, v bodě $[0; 0]$ nabývá svého ostrého globálního maxima, je sudá (její graf je osově souměrný podle osy y), není prostá (např. $[-1; -2] \in f_1$ a $[1; -2] \in f_1$), proto k f_1 neexistuje inverzní funkce.

   b) Pro funkci f_2 platí $D(f_2) = \mathbb{R} - \{-4\}$, $H(f_2) = \mathbb{R} - \{1\}$, v $(-\infty; -4)$ je rostoucí, v $(4; \infty)$ je rostoucí, ale pozor: není rostoucí v $D(f_2)$, nemá extrémy, není sudá ani lichá (ale její graf je středově souměrný podle bodu $[-4; 1]$), průsečíky se souřadnicovými osami má v bodech $[-2; 0]$ a $\left[0; \frac{7}{8}\right]$, je prostá, proto k f_2 existuje inverzní funkce $f_2^{-1} : y = -4 - 2/\sqrt[3]{x-1}$.

   c) Předpis funkce f_3 je výhodné upravit:

$$f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3.$$

   Odtud již vidíme, že pro funkci f_3 platí $D(f_3) = \mathbb{R}$, $H(f_3) = \mathbb{R}$, je rostoucí v $D(f_3)$, nemá extrémy, není sudá ani lichá (ale její graf je středově souměrný podle bodu $[1; 0]$, což je současně průsečík s osou x), průsečík s osou y je v bodě $[0; -1]$, je prostá, proto k f_3 existuje inverzní funkce $f_3^{-1} : y = 1 + \sqrt[3]{x}$ s tím, že skutečně platí $D(f_3^{-1}) = \mathbb{R}$ a $H(f_3^{-1}) = \mathbb{R}$, neboť lichou odmocninu můžeme uvažovat i ze záporných čísel.



Obrázek 4.4: K řešení úlohy 3

4. Platí

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-452}=\left(-\frac{5}{3}\right)^{452}=\left(\frac{5}{3}\right)^{452}>\left(\frac{5}{3}\right)^{450}=$$

$$=\frac{5^{450}}{3^{450}}=\frac{5^{3\cdot150}}{3^{2\cdot225}}=\frac{(5^3)^{150}}{(3^2)^{225}}=\frac{125^{150}}{9^{225}}.$$

5. Rozšíříme výrazem $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, při úpravách částečně odmocníme $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ a $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; výsledek $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

6. Komplexní číslo $1-i$ převedeme do goniometrického tvaru a užijeme Moivreovu větu

$$(1-i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^n=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{7n\pi}{4}+i\sin\frac{7n\pi}{4}\right).$$

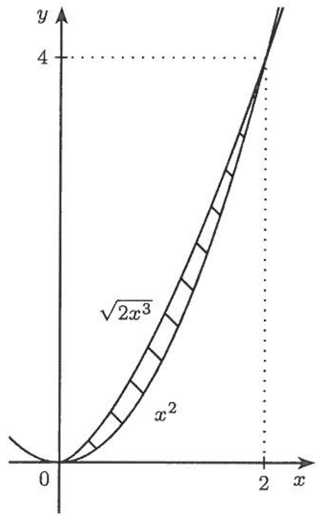
Odtud vidíme, že $(1-i)^n\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když $\sin\frac{7n\pi}{4}=0$, což nastává tehdy a jen tehdy, když $\frac{7n\pi}{4}$ je rovno libovolnému celočíselnému násobku π, tj. právě tehdy, když číslo n je dělitelné čtyřmi.

7. Vyřešením rovnice $x^2=\sqrt{2x^3}$ zjistíme x-ové souřadnice průsečíků grafů obou funkcí. Její kořeny - čísla 0 a 2 - jsou tedy hledané integrační meze. Dále

$$\int_0^2\left(\sqrt{2x^3}-x^2\right)dx=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\left[\sqrt{x^5}\right]_0^2-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2=\frac{16}{5}-\frac{8}{3}=\frac{8}{15}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad S=\frac{8}{15}\,j^2.$$

8. $\frac{3z+1}{x^2}$; podmínky $x\neq0$, $x\neq2y$, $z\neq\pm\frac{1}{3}$.



Obrázek 4.5: K řešení úlohy 7

9. $V(x) = \frac{-6}{x+2}$, podmínky $x \neq \pm 2$, aby $V(x) \in \mathbb{Z}$ musí platit

$$x + 2 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$$

Vzhledem k tomu, že všechny hodnoty vyhoví podmínkám, dostáváme

$$x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}.$$

10. $V(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$, při úpravě nezapomeňte, že násobení či dělení má přednost před sčítáním a odečítáním, podmínky $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ a $x \neq \frac{1}{2}$. Protože kvadrát je nezáporný, platí $V(x) \geq 0$ právě tehdy, když $x = 2$.

11. Pro úpravu je vhodné užít substituce $a = x^4$, $b = y^4$. Výsledek $\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)$, podmínky $a > 0$ a $b \geq 0$.