1. Jednodušší problémy vhodné i pro mladší studenty

O chlapcích a míči

Tři chlapci si chtěli koupit míč, který stál 30 korun. Každý z nich tedy dal 10 korun. Poté, co odešli z obchodu, si prodavač uvědomil, že míč dal do slevy a stál už jen 25 korun. Dal tedy 5 korun svému učedníkovi, aby je běžel chlapcům rychle vrátit. Učedník však nebyl poctivý. Každému z chlapců vrátil po jedné koruně a dvě koruny si nechal. Chlapci tudíž zaplatili 27 korun, 2 koruny má učedník, ale kam se „ztratila“ koruna, která zbývá do částky 30 Kč?

Řešení. Žádná koruna se samozřejmě neztratila. „Chytákem“ je nesmyslně položená otázka. Dopočítávat je třeba k částce 25 Kč. Platí $27 - 2 = 25$ (a samozřejmě také $27 + 2 \neq 30$).

O lámání čokolády

Máme tabulku čokolády, která má $m \times n$ „čtverečků“. Máme za úkol tuto tabulku rozlámat na jednotlivé čtverečky. Jakým způsobem to bude nejvýhodnější provést, abychom museli udělat co nejméně zlomů? Jaký je tento nejmenší možný počet zlomů? Při lámání je zakázáno dávat kousky čokolády na sebe a lámat je ve více vrstvách najednou.

Řešení. Je lhostejné, jakým způsobem čokoládu lámeme. Jedním zlomem (ať je libovolně dlouhý) dostaneme z jednoho kusu dva. Na konci máme mít $m \times n$ „čtverečků“, takže musíme provést $m \times n - 1$ zlomů.

O kouzelném stromě

Na kouzelném stromě vyrostlo 25 citrónů a 30 pomerančů. Sadař každé ráno utrhne 2 plody. Poté přes noc vyroste 1 nový plod a to pomeranč, pokud byly utržené plody stejného druhu, resp. citrón v opačném případě. Jednoho rána bude na stromě jediný poslední plod. Bude to citrón nebo pomeranč? Je odpověď jednoznačná?

Řešení. Parita počtu citrónů je každé ráno stejná (lichý počet), proto bude posledním plodem citrón.

O kostkách domina na šachovnici

Zjistěte, zda lze zaplnit šachovnici 8×8 s vyříznutými políčky v protějších rozích pomocí dominových kostek (31 ks).

Řešení. Je užitečné využít obarvení šachovnice (světlá a tmavá pole). Při libovolném položení na šachovnici kostka domina zakrývá vždy jedno světlé a jedno tmavé pole. Oba protější rohy jsou téže barvy. Vyříznutím protějších rohů „upravená“ šachovnice má tedy 32 polí jedné barvy a 30 polí druhé barvy. Pokrýt tudíž požadovaným způsobem nelze.

O bratrech na rozcestí

Jdeme do města A. Dorazili jsme na rozcestí, kde se cesta, po které jsme přišli, větví do dvou cest. Jedna z nich vede do města A, druhá do města B. Nevíme však, která je která. Na rozcestí sedí dva bratři. Jeden z nich vždy lže a druhý vždy mluví pravdu. Opět ale nevíme, který z nich je lhář a který je pravdomluvný. Jednomu z nich můžeme položit jednu libovolnou otázku. Jak ji máme zformulovat, abychom se z následné odpovědi mohli s jistotou správně rozhodnout pro správnou cestu?

Řešení. Co by nám odpověděl Váš bratr na otázku, zda tato cesta vede do města A? Ať tuto otázku položíme kterémukoliv z nich, dostaneme lživou odpověď.

O dělitelnosti sedmi

Dokažte kritérium dělitelnosti sedmi.

Pro libovolná celá čísla k, l platí

$$7 \mid (10k + l) \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid (k - 2l)\ .$$

Řešení.

$$7 \mid (10k + l) \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid [7\,(k + l) + (3k - 6l)] \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid [3\,(k - 2l)] \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid (k - 2l)\ .$$

Ukázka využití

$$7 \mid 17\,941 \ \Leftrightarrow\ 7 \mid (1\,794 - 2) \ \Leftrightarrow\ 7 \mid 1\,792 \ \Leftrightarrow\ 7 \mid (179 - 4) \ \Leftrightarrow\ 7 \mid 175 \ \Leftrightarrow\ 7 \mid (17 - 10) \ \Leftrightarrow\ 7 \mid 7\,.$$

2. Problémy z oblasti teorie pravděpodobnosti

O narozeninách

Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině k osob ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq 365$) mají aspoň dvě osoby narozeniny v týž den v roce? Pro jednoduchost předpokládejme, že každý den v roce má „stejnou šanci“ být něčími narozeninami. Dále uvažujme nepřestupný rok a předpokládejme, že 29. 2. se nikdo nenarodil.

Řešení. Spočtěme pravděpodobnost opačného jevu. Označme $\overline{A}$ jev, že žádné dvě osoby nemají narozeniny v týž den v roce. Pak platí

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot [365 - (k-1)]}{365^k}\ , \quad P\,(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)\ .$$

Číselně pak vychází

k	$P\,(A)$
10	0,12
15	0,25
20	0,41
22	0,48
23	0,51
25	0,57
30	0,71
35	0,81
40	0,89

Přestože v provedeném výpočtu neuvažujeme biologické poznatky, je získaný výsledek reálný. Ve většině gymnaziálních tříd totiž alespoň jedna dvojice studentů, kteří slaví narozeniny v týž den roku, opravdu existuje.

Auto nebo koza (tzv. Monty Hallův problém)

V jisté televizní soutěži byl výherce postaven před tři garáže. Za zavřenými dveřmi v jedné z nich stálo auto a ve dvou zbývajících koza. Soutěžící pochopitelně nevěděl, ve které garáži auto je. Moderátor (Monty Hall) jej vyzval, aby označil jednu garáž, kde doufá, že by auto mohlo být. Poté otevřel jedny z neoznačených dveří a soutěžícímu ukázal, že v té garáži je koza. Poté se výherce znovu zeptal, zda trvá na své první volbě, nebo zda si ji přeje změnit. Teprve poté získá výherce cenu, která je v jím vybrané garáži. Rozhodněte, zda je pro soutěžícího, který chce vyhrát auto, výhodné svou volbu po vyzvání moderátora změnit. Své tvrzení zdůvodněte.

Řešení. Pokud výherce nejprve zvolí garáž s autem, což nastane s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, změnou si pohorší. V opačném případě (tedy s pravděpodobností $\frac{2}{3}$) si změnou zajistí automobil. Změna původního výběru je pro něj tedy výhodnější, šance na výhru auta se mu tak zdvojnásobí.

Sportka

Při hře Sportka se z osudí, ve kterém je 49 míčků s čísly $1, 2, \ldots, 49$ (každé číslo je použito právě jednou), vylosuje šest míčků (tj. 6 čísel) a navíc jedno číslo dodatkové. Hráč před losem podává tiket, na kterém tipuje 6 čísel, která věří, že budou vytažena. Jaká je pravděpodobnost, že hráč vyhraje jednu z prvních čtyř cen v této hře? Každý míček přitom má stejnou pravděpodobnost být vytažen. První cenu hráč získá, uhodne-li všech šest vytažených čísel. Druhou cenu dostane, pokud z vylosovaných čísel uhodne pět a šesté číslo na jeho tiketu se shoduje s číslem dodatkovým. Třetí cena je udělena v případě, že hráč uhodne právě pět z vylosovaných čísel a šesté číslo na jeho tiketu je jiné než vylosované dodatkové číslo. Konečně čtvrtou cenu získá ten hráč, který uhodne právě čtyři z vylosovaných čísel (bez ohledu na dodatkové číslo).

Řešení. Počet všech možností jak podat tiket je $|\Omega| = \binom{49}{6} = \ldots = 13\,983\,816$, přitom první cenu vyhrává jediný z nich. Pravděpodobnost této výhry je tedy asi $0{,}000\,007\%$. Pravděpodobnost výhry druhé ceny je šestkrát větší, tj. asi $0{,}000\,043\%$, protože tu může vyhrát šest různých tiketů (šesti způsoby na tiketu zvolíme jedno z výherních čísel, které nezatrhneme a místo něj označíme číslo dodatkové). Dále

$$P(C_3) = \frac{\binom{6}{5} \cdot 42}{\binom{49}{6}} \quad \Rightarrow \quad P(C_3) \doteq 0{,}001\,8\,\%\,.$$

Poslední číslo na tiket skutečně vybíráme ze 42 možných čísel, neboť nesmíme vybrat žádné ze šesti výherních čísel (to bychom totiž získali první cenu) ani číslo dodatkové (to bychom totiž získali druhou cenu). Konečně

$$P(C_4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \quad \Rightarrow \quad P(C_4) \doteq 0{,}097\,\%\,.$$

Než si v této hře vsadíte, porovnejte vypočtené pravděpodobnosti jednotlivých výher např. následujícím způsobem. Ročně na našich silnicích zemře vinou dopravní nehody přibližně tisíc lidí. Uvážíme-li, že v ČR žije asi deset miliónů obyvatel, lze tvrdit, že pravděpodobnost úmrtí občana ČR při dopravní nehodě je zhruba 0,01%...

Ruleta

V ruletě je padne jedno z 37 čísel $(0, 1, \ldots, 36)$, přičemž 18 polí je červených, 18 černých a 0 je zelená. Při sázce na barvu (červená či černá) hráč v případě výhry dostává dvojnásobek svého vkladu.

1. Uvažujme hráče, který si pětkrát po sobě vsadí tutéž částku na barvu. Jaká je pravděpodobnost, že po těchto pěti hrách bude v mínusu (tzn. že alespoň tři ze svých pěti sázek prohraje)?

2. Jednou z nejznámějších hráčských strategií je v případě neúspěchu zdvojnásobovat svou sázku do další hry. Uvažujme hráče, který začíná se sázkou 100 Kč. S jakou pravděpodobností při dodržování popsané strategie prohraje 12 700 Kč?

Řešení.

1. Užitím Bernoulliho schématu pro hledanou pravděpodobnost dostáváme

$$\left(\frac{19}{37}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^4 \cdot \frac{18}{37} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^3 \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^2 \doteq 0{,}525\,.$$

   Není si navíc těžké uvědomit, že pravděpodobnost prohry roste s počtem odehraných her. Podobně bychom například vypočetli, že po sedmi hrách by pravděpodobnost alespoň čtyř proher byla již přibližně $53,0\%$.

2. Uvedenou částku hráč prohraje v případě, že sedm krát za sebou „nebude mít štěstí" a „správnou" barvu ani jednou neuhodne. Nastane to s pravděpodobností $\left(\frac{19}{37}\right)^7$, což je přibližně 0,94%. Stane se to tedy průměrně každému 106. hráči. Doplňme, že v případě „úspěchu", tj. v okamžiku první výhry hráč dosáhne „čistého" zisku 100 Kč a proces se opakuje.

Paradox Chevaliera de Méré

Chevalier de Méré pozoroval, že při hodu třemi kostkami padá součet 11 častěji než součet 12, i když podle jeho názoru mají oba tyto jevy stejnou pravděpodobnost. Byl názor Chevaliera de Méré správný? Jaká je pravděpodobnost realizace každého z uvažovaných jevů?

Řešení. Uvažujme, že každá z kostek je jiné barvy. Počet všech možných případů (tzn. jmenovatel hledaného zlomku) je 6^3. Počet příznivých možností zachytíme v následující tabulce.

možnosti realizace součtu 11	počet způsobů	možnosti realizace součtu 12	počet způsobů
$6+4+1$	6	$6+5+1$	6
$6+3+2$	6	$6+4+2$	6
$5+5+1$	3	$6+3+3$	3
$5+4+2$	6	$5+5+2$	3
$5+3+3$	3	$5+4+3$	6
$4+4+3$	3	$4+4+4$	1

Součet 11 tedy padne s pravděpodobností $\frac{27}{216} = 0{,}125$, zatímco součet 12 padne „pouze" s pravděpodobností $\frac{25}{216} \doteq 0{,}116$. Chevalier de Méré se tedy mýlil. Pozoruhodná je však skutečnost, že pravděpodobnost obou jevů se liší pouze o necelé jedno procento. Pokud tedy Chevalier de Méré tuto skutečnost opravdu pozoroval, svědčí to zřejmě o jeho skutečně veliké vášni pro tuto hru...

Mamogram

Pravděpodobnost, že má žena rakovinu prsu, je 0,8%. Pokud ji má, pak pravděpodobnost, že mamogram bude pozitivní, je 90%. Pokud ji nemá, pak pravděpodobnost, že mamogram bude i přesto pozitivní, je 7%.

1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná žena bude mít pozitivní mamogram?

2. Uvažujme ženu, jejíž mamogram je pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že má skutečně rakovinu?

Řešení. Označme R (resp. $\overline{R}$) jev, že jistá žena má (resp. nemá) rakovinu prsu a P jev, že její mamogram je pozitivní.

1. Pomocí vzorce pro celkovou pravděpodobnost vypočteme

$$P(P) = P(P \mid R) \cdot P(R) + P\left(P \mid \overline{R}\right) \cdot P\left(\overline{R}\right) = \frac{90}{100} \cdot \frac{8}{1000} + \frac{7}{100} \cdot \frac{992}{1000} \doteq 0{,}077\,.$$

2. S využitím Bayesova vzorce dostaneme

$$P(R \mid P) = \frac{P(P \mid R) \cdot P(R)}{P(P)} \doteq 0{,}094\,.$$

3. Hypotézy, úsudky a závěry, číselné množiny, problematika nekonečna

Pokračování řady

Často lze narazit na úlohy typu „Jak pokračuje řada 1, 2, 3, 4, 5, ...?“, které jsou však naprosto nesmyslné. Správná odpověď totiž zní: „Jakkoliv!“.

1. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti, která má těchto prvních 6 členů

   $$1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;x\,, \text{ kde } x \text{ značí libovolné předem zvolené číslo.}$$

   Řešení. Například

   $$a_n = n + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!} \cdot (x-n)\;.$$

2. Uvažujme posloupnosti dané vzorci pro n-tý člen

   $$a_n = 2^{n-1} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)\,.$$

   Snadno se můžeme přesvědčit, že pro ně platí

   $$a_1 = b_1 = 1\,, \quad a_2 = b_2 = 2\,, \quad a_3 = b_3 = 4\,, \quad a_4 = b_4 = 8\,, \quad a_5 = b_5 = 16\,, \quad a_6 = 32 \neq b_6 = 31\,.$$

   Dále je ještě zajímavé, že $a_9 = b_{10} = 256$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je přitom navíc pozoruhodná například následujícími vlastnostmi.

   - Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že

     $$24 \mid \left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right) \quad \Leftrightarrow \quad b_n \in \mathbb{Z}\,.$$

   - Tato posloupnost udává největší možný počet oblastí, na které může být kruh rozdělen pomocí všech tětiv určených n různými body jeho hraniční kružnice.

Prvočíselná hodnota výrazu

Uvažujme výraz

$$V(n) = n^2 - n + 41\,.$$

Rozhodněte, zda existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $V(n)$ není prvočíslem.

Řešení. Pomocí úpravy

$$V(n) = n(n-1) + 41$$

by nás mělo napadnout, že $V(41)$ a $V(42)$ jsou čísla složená. Studenti leckdy vyzkouší, že $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$ (a „v lepším případě“ ještě několik dalších hodnot) jsou prvočísla a vysloví chybný závěr, že $V(n)$ je prvočíslem vždy.

Pozoruhodná je navíc skutečnost, že dokonce platí

$$V(n) \text{ je prvočíslo pro všechna } n < 41\,.$$

Obecně totiž pro výraz tvaru

$$V(n) = n^2 - n + k\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{N}$ jsou přirozená platí, že

$$V(n) \text{ je prvočíslo pro všechna } n < k \text{ právě tehdy, když } k \in \{2; 3; 5; 11; 17; 41\}\,,$$

tzn. $k = 41$ je největší číslo s touto vlastností. Jedná se o tzv. *Eulerova šťastná čísla.*

Kvádr a Viètovy vztahy

Vypočtěte objem a povrch kvádru, jehož délky hran (v centimetrech) jsou kořeny rovnice

1. $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$,
2. $x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$.

Řešení. Pomocí Viètových vztahů můžeme provést „rychlé“ řešení. Zjistíme tak, že

1.

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 14 \quad &\Rightarrow \quad S = 28\,\mathrm{cm}^2\,, \\ x_1x_2x_3 = 7 \quad &\Rightarrow \quad V = 7\,\mathrm{cm}^3\,, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5 \quad &\Rightarrow \quad S = 10\,\mathrm{cm}^2\,, \\ x_1x_2x_3 = 6 \quad &\Rightarrow \quad V = 6\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

Takové řešení je sice „elegantní“, ale není úplné. Nezabývali jsme se otázkou, zda takový kvádr existuje. Správně můžeme pouze usoudit, že pokud takový kvádr existuje, má příslušný povrch a objem. Je tedy třeba ještě zjistit, zda má každá z příslušných rovnic tři kladné reálné kořeny (přičemž není nezbytně nutné najít jejich konkrétní hodnoty).

1. Označme $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$ a zkoumejme znaménka tohoto polynomu

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

Z provedeného rozboru je díky spojitosti funkce $y = P(x)$ patrné, že v každém z intervalů $(0; 1)$, $(2; 3)$ a $(3; 4)$ leží alespoň jeden kořen. Vzhledem k tomu, že uvažovaný polynom je třetího stupně a má tedy nejvýše tři reálné kořeny, musí v každém z uvedených intervalů ležet kořen právě jeden. Tento polynom tedy má tři kladné reálné kořeny, což jsme potřebovali dokázat. Dále lze ještě ukázat, že všechny tyto kořeny jsou iracionální a je pro nás tudíž prakticky nemožné určit jejich přesné hodnoty.

2. Pomocí hledání racionálních kořenů najdeme rozklad

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x - 3)\left(x^2 - x + 2\right)\,.$$

Kvadratický polynom, který v něm vystupuje, má záporný diskriminant a nemá proto reálné kořeny. Znamená to tedy, že takový kvádr neexistuje.

Úloha o extrému

Obsah dolní podstavy kvádru je $1\,\mathrm{cm}^2$, délka jeho tělesové úhlopříčky $2\,\mathrm{cm}$. Určete jeho výšku tak, aby měl maximální povrch.

Řešení. Označme a a b délky podstavných hran a v výšku uvažovaného kvádru. S využitím Pythagorovy věty dle zadání dostaneme

$$a^2 + b^2 + v^2 = 4 \quad \text{a} \quad ab = 1\,. \tag{1}$$

Odtud vypočteme

$$a^2 + b^2 = 4 - v^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - 2ab = 4 - v^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - 2 = 4 - v^2 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = \sqrt{6 - v^2}\,, \tag{2}$$

přičemž musí být zřejmě splněna podmínka $0 < v \leq \sqrt{6}\,\mathrm{cm}$. Pro povrch kvádru tedy platí

$$S = 2ab+2av+2bv = 2+2v\,(a+b) = 2+2v\sqrt{6-v^2} = 2+2\sqrt{6v^2-v^4} = 2+2\sqrt{9-(v^2-3)^2} \leq 2+2\cdot 3 = 8\,. \tag{3}$$

Protože rovnost ve (3) vzhledem k výše uvedené podmínce pro v nastává právě tehdy, když $v = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, bude povrch kvádru maximální (tj. $8\,\mathrm{cm}^2$) pro tuto hodnotu v. Závěr na tomto místě ovšem ještě nelze učinit! Nevíme totiž, zda kvádr zjištěných vlastností existuje. Dosaďme nalezenou hodnotu v do (1) a dořešme tuto soustavu. Pro $a > 0$ by mělo současně platit

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{a} \quad a^2 + \frac{1}{a^2} + 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 - a^2 + 1 = 0 = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\,,$$

ale to je spor. Znovu jsme zjistili, že kvádr takových vlastností neexistuje.

Ovšem v řešení úlohy bychom měli pokračovat! Dosud jsme totiž jen zjistili, že neexistuje „ideální“ kvádr, který by měl maximální teoreticky možný povrch (tj. $8\,\mathrm{cm}^2$). Stále však stojíme před úkolem nalézt kvádr maximálního povrchu splňující zadané podmínky. Označme $p = \sqrt{6 - v^2}$. Podle (2) a (1) víme, že $p > 0$ a že pro délky a a b podstavných hran uvažovaného kvádru má platit

$$a + b = p \qquad \text{a} \qquad ab = 1\,.$$

Po dosazení $b = \frac{1}{a}$ do první rovnice této soustavy dostáváme podmínku

$$a + \frac{1}{a} = p \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2 - ap + 1 = 0\,, \tag{4}$$

která představuje kvadratickou rovnici s neznámou a a parametrem p. Pro existenci reálného řešení této rovnice je nutné a stačí, aby její diskriminant byl nezáporný, tedy

$$p^2 - 4 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad p^2 = 6 - v^2 \geq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 \geq v^2\,. \tag{5}$$

Připomeňme, že z vyjádření (3) již vidíme, že S bude maximální tehdy, když bude výraz $(v^2-3)^2$ nabývat nejmenší možné hodnoty. To s ohledem na „nově“ nalezenou podmínku (5) nastane právě tehdy, když $v = \sqrt{2}$ cm (a tedy $p = 2$) . Podle (3) určíme, že maximální povrch bude $S_{max} = 2 + 4\sqrt{2}$ cm^2. Protože podmínka (5) zajišťuje „pouze“ existenci reálných kořenů rovnice (4), musíme ještě zkontrolovat, že pro $p = 2$ má tato rovnice kladný kořen a. Neboť $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$, již snadno nahlédneme, že v tomto případě bude tímto kořenem $a = 1$. Konečně dosazezením do (1) vypočteme, že také $b = 1$ je kladné.

Závěr. Zadání tedy vyhoví kvádr o výšce $v = \sqrt{2}$ cm (se čtvercovou podstavou o hraně délky 1 cm), který má povrch $S_{max} = 2 + 4\sqrt{2}$ cm^2.

Spočetné a nespočetné množiny

Pomocí tzv. *diagonální* metody Georg Cantor roku 1873 ukázal, že neexistuje bijekce mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ (konkrétně mezi $\mathbb{N}$ a intervalem $(0;1)$). Předpokládejme sporem, že taková bijekce existuje, tzn. že všechna reálná čísla z $(0;1)$ lze seřadit do posloupnosti (neboli očíslovat). Dostáváme tak schéma

$$\begin{array}{lclllllll} a_1 & = & 0, & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_2 & = & 0, & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ a_3 & = & 0, & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & \dots \\ \vdots & & & & & & & & . \\ a_n & = & 0, & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{array}$$

Myšlenka důkazu pak spočívá v uvážení čísla $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ takového, že $b_i \neq a_{ii}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Číslo $b \in (0;1)$, ale ve výše uvedeném schématu se nenachází. Reálných čísel je tedy „více“ než přirozených čísel, je jich nespočetně mnoho. Není tedy „nekonečno jako nekonečno“. „Různá nekonečna“ mohou být „různě velká“. Naopak bijekce mezi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ existují, např. mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ ji lze vysvětlit pomocí následující tabulky

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Pro konečné množiny je přitom nemyslytelné, aby existovala bijekce mezi nějakou množinou a její vlastní podmnožinou. Spočetnou množinou označujeme každou množinu, ze které existuje bijekce do $\mathbb{N}$. Obecně platí dokonce věta, která říká, že sjednocením nejvýše spočetně mnoha nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina. To zejména znamená, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou tedy spočetné. Naopak množina $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ musí být nespočetná, tzn. že iracionálních čísel „je výrazně více“ než těch racionálních.

Mohutnost $\mathbb{N}$ označujeme $\aleph_0$, mohutnost $\mathbb{R}$ pak značíme c. V této souvislosti se nabízí několik otázek.

1. Existuje menší nekonečná mohutnost než $\aleph_0$?
2. Existuje mohutnost mezi $\aleph_0$ a c?
3. Existuje větší mohutnost než c?

Pro uvedená *kardinální* čísla navíc platí pozoruhodné početní zákony. Množiny $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{Z}^-$ mají stejné mohutnosti, navíc platí $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. Pomocí kardinálních čísel lze tyto skutečnosti vystihnout následujícími „pro studenty překvapivě platícími“ rovnostmi $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$. Obvykle je také zaujme výklad této problematiky na příkladu tzv. *Hilbertova* hotelu.

Dále je možné studenty poměrně bezproblémově přesvědčit o tom, že $\aleph_0$ je nejmenší nekonečné kardinální číslo, neboť prvky jakékoliv nekonečné množiny „menší“ než $\mathbb{N}$ lze uspořádat do posloupnosti (např. všechna přirozená čísla dělitelná třemi, všechna prvočísla, ...). Tím je první otázka zodpovězena.

Pro konečné množiny snadno zdůvodníme, že množina všech podmnožin k prvkové množiny má 2^k prvků, přičemž nerovnost $k < 2^k$ platí ostře i pro nekonečné množiny (tzv Cantorova věta). Množina všech podmnožin množiny všech reálných čísel má tedy mohutnost 2^c, která je větší než c. Snadno nahlédneme, že takto můžeme pokračovat „do nekonečna“. Existuje tedy nekonečně mnoho „různě velkých“ nekonečných množin. Vyřešena je i třetí otázka.

Pozorného studenta nyní napadne, jak je to s číslem $2^{\aleph_0}$. Dá se ukázat, že $2^{\aleph_0} = c$, což ovšem druhou otázku neřeší. Odpověď na ni nebyla známá ještě několik desítek let po Cantorových objevech. Tvrzení, které odpovídá záporné odpovědi na tuto otázku, se říká *hypotéza kontinua*. V šedesátých letech minulého století bylo dokázáno, že toto otázka je nerozhodnutelným problémem.

Kurt Gödel a nerozhodnutelná tvrzení

Roku 1931 publikoval tento brněnský rodák slavnou větu o neúplnosti, která tvrdí, že *v každé bezesporné teorii obsahující aritmetiku existuje nerozhodnutelné tvrzení*. Od té doby tudíž víme, že nelze vybudovat takovou teorii, jejíž systém axiomů by byl současně bezesporný, úplný a nezávislý.

- Právě jsme uvedli konkrétní příklad takového nerozhodnutelného tvrzení v teorii množin - hypotézu kontinua.
- Dalším slavným příkladem nerozhodnutelného tvrzení je tzv. (Eukleidův) *pátý postulát*. Říká, že daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu rovnoběžku. Tento axiom budil staletí pozornost matematiků pro svou nápadnou složitost oproti ostatním postulátům, které Eukleides formuloval. Snahy o jeho důkaz odvozením ze systému ostatních axiomů přinesly v 19. století nečekané vyvrcholení. Vznikla neeukleidovská geometrie.
- Velká Fermatová věta. Neexistují přirozená čísla x, y, z a n taková, že $n > 2$, přičemž by platilo

  $$x^n + y^n = z^n \,.$$

  Tato hypotéza zformulovaná Pierrem de Fermatem roku 1670 byla dokázána po staletích intenzívních snah řady matematiků až na sklonku minulého století (1995 Andrew Wiles).
- Eulerova domněnka. Neexistují přirozená čísla x, y, z, w, pro něž by platilo

  $$x^4 + y^4 + z^4 = w^4 \,.$$

  Roku 1988 ji Noam Elkies vyvrátil když zjistil, že platí

  $$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4 \,.$$
- I dnes v matematice narazíme na řadu tvrzení, která se dlouhodobě nedaří dokázat ani vyvrátit. Jsou nerozhodnutelná?
  - Existuje konečně či nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat?
  - Goldbachova hypotéza (1742). Každé sudé číslo větší než 2 lze rozložit na součet dvou prvočísel.

Harmonická řada

Na střední škole se z nekonečných řad zpravidla zkoumá pouze nekonečná geometrická řada. Studenti se učí, že existují nekonečné řady, které konvergují a které divergují. Sečteme-li nekonečně mnoho členů konvergentní nekonečné řady, dostaneme konečné číslo.[1] Zatímco součet nekonečně mnoha členů divergentní řady s nezápornými členy je neohraničený. Velmi pozoruhodnou řadou je vzhledem ke konvergenci či divergenci řada harmonická

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \,.$$

[1]Tato skutečnost je sama o sobě překvapivá. Souvisí se známým starověkým filosofickým problémem o *Achilleovi a želvě* (jedna z tzv. Zenónových aporií), který je možné matematicky korektně vysvětlit až pomocí nekonečných řad díky teorii limit, která vznikla až v 19. století tedy o více než 2000 let po Zenónově smrti. Rychlonohý Achilles podle této úvahy nemůže dohonit želvu, která leze před ním, neboť ta může vždy udělat krůček takové délky, aby Achilles zůstal za ní.

Uvažujme její n-té částečné součty

$$\begin{array}{rclcl}
s_{2^1} & = & 1+\frac{1}{2}\,, & & \\
s_{2^2} & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} & > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & = 1+2\cdot\frac{1}{2}\,, \\
s_{2^3} & = & s_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & > 1+2\cdot\frac{n}{2}+4\cdot\frac{1}{8} & = 1+3\cdot\frac{1}{2}\,, \\
s_{2^4} & = & s_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} & > 1+3\cdot\frac{n}{2}+8\cdot\frac{1}{16} & = 1+4\cdot\frac{1}{2}\,, \\
 & & & \vdots & \\
s_{2^n} & & & > & 1+n\cdot\frac{1}{2}\,.
\end{array}$$

Takto můžeme nahlédnout, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,.$$

Harmonická řada tedy diverguje. Sečteme-li dostatečný počet jejích členů, překonáme jakoukoliv předem danou mez. Tato řada ovšem „diverguje velice pomalu“. Například

$$s_{1\,000} \doteq 7{,}48\,, \qquad s_{10^6} \doteq 14{,}39\,.$$

Této skutečnosti lze „využít“ k zadání úloh s pro studenty velmi překvapivým a nečekaným závěrem.

Příklad. Uvažujme housenku lezoucí po elastické dráze, která má na počátku 1 m. Housenka za minutu uleze 10 cm. Poté elastickou dráhu „zlá bytost“ natáhne o 1 m. Housenka tedy zůstane v $\frac{1}{10}$ dráhy. Za další minutu uleze opět 10 cm. Poté elastickou dráhu „zlá bytost“ znovu natáhne o 1 m. Doleze housenka na konec dráhy?

Řešení. Sčítáme harmonickou řadu

$$\frac{1}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right)\,,$$

o které víme, že diverguje, což znamená, že housenka do cíle doleze. To je ovšem překvapivé z toho pohledu, že po minutě jí chybělo do cíle 90 cm, po dvou minutách 170 cm, po třech minutách 245 cm a cíl se jí tak oproti výchozímu stavu „stále vzdaluje“. Další otázkou je, za jakou dobu se do cíle dostane. Případně kolik metrů by tímto způsobem „stihla ulézt“ od začátku světa. :-)

Aproximace iracionálních čísel

Už jsme vysvětlili, že iracionálních čísel je „je výrazně více“ než těch racionálních. Dále víme, že existují konvergentní nekonečné řady, jejichž součet se blíží k nějaké konkrétní hodnotě. Dá se odvodit, že například platí

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots\,, \qquad \pi = 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\dots\right)$$

nebo

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\dots$$

Sečteme-li tedy nekonečně mnoho „vhodných“ zlomků, dostaneme číslo, které se zlomkem vyjádřit nedá. Můžeme tak ale studentům nastínit tuto představu o iracionálních číslech. Pomocí „experimentování“ s kalkulačkou pak můžeme nechat studenty „zkoumat rychlost“ konvergence uvedených řad. Mohou si tak všimnout, že součtem několika prvních členů první řady získají „brzy dobrou“ aproximaci čísla e, zatímco pro „srovnatelně dobrý výsledek“ je v případě dalších uvedených řad třeba sečíst daleko více členů.