

Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 65. ročníku MO v Pardubicích

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

mnohé malé děti v čase adventním méně zlobí doufajíce, že pod stromčkem najdou vysněné dárky. K mým adventním nadějím v posledních letech patří, že o vánočních prázdninách konečně vymyslím, o čem budu na ústředním kole Matematické olympiády povídat. Stalo se tak naštěstí i tentokrát, ještě před Novým rokem 2016. Nevím už, jakou souhrou myšlenek jsem se dobral k poměrně triviálnímu zjištění, že jméno města, do kterého jsme se dnes sjeli, je sestaveno z devíti různých písmen. Lze je proto využít namísto číslic (od jedničky po devítku) pro hru jednoho hráče s tužkou a papírem, hru, která je v současné době na celém světě snad nejoblíbenější.

P	A	R	D	U	B	I	C	E
D	U	B	I	C	E	P	A	R
I	C	E	P	A	R	D	U	B
A	R	P	U	B	D	C	E	I
U	B	D	C	E	I	A	R	P
C	E	I	A	R	P	U	B	D
R	P	A	B	D	U	E	I	C
B	D	U	E	I	C	R	P	A
E	I	C	R	P	A	B	D	U

Ano, vidíte příklad správně vyplněné tabulky při hře sudoku: v každém z 9 řádků, 9 sloupců i devíti vyznačených bloků o 9 polích jsou všechna písmena různá neboli v nich žádné z devíti písmen nikde nechybí. Je jasné, že při hře sudoku vůbec nezáleží na tom, jakých 9 různých znaků do políček tabulky 9×9 vpisujeme, mohou to být nejen číslice, ale i účelně vybraná písmena.

Asi jste zpozorovali, že slovo Pardubice je k přečtení v prvním řádku naší tabulky. Možná také někdo postřehl, že Pardubice přečteme i po řádcích levého horního bloku a také že celá tabulka se vyznačuje jistou pravidelností,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

kteřá zaručuje její „sudokost“. Je založena na rozdělení písmen řádků do tří trojic, které jsou v nové kopii tabulky barevně rozlišeny:

P	A	R	D	U	B	I	C	E
D	U	B	I	C	E	P	A	R
I	C	E	P	A	R	D	U	B
A	R	P	U	B	D	C	E	I
U	B	D	C	E	I	A	R	P
C	E	I	A	R	P	U	B	D
R	P	A	B	D	U	E	I	C
B	D	U	E	I	C	R	P	A
E	I	C	R	P	A	B	D	U

Že je celá tabulka v pořádku, je docela očividné, ty tři barvy to pěkně zprůhledňují.

Uvedme teď ještě jednu tabulku sudoku, ve které jsou Pardubice k přečtení ne dvakrát, ale dokonce třikrát.

P	A	R	B	D	U	C	E	I
D	U	B	E	I	C	A	R	P
I	C	E	R	P	A	U	B	D
C	E	I	P	A	R	B	D	U
A	R	P	D	U	B	E	I	C
U	B	D	I	C	E	R	P	A
B	D	U	C	E	I	P	A	R
E	I	C	A	R	P	D	U	B
R	P	A	U	B	D	I	C	E

Ano, jde o tři bloky na jedné úhlopříčce. Vlastně v celé tabulce jsou jen tři

různé bloky, spolu třikrát vedle sebe a třikrát pod sebou.

P	A	R	B	D	U	C	E	I
D	U	B	E	I	C	A	R	P
I	C	E	R	P	A	U	B	D
C	E	I	P	A	R	B	D	U
A	R	P	D	U	B	E	I	C
U	B	D	I	C	E	R	P	A
B	D	U	C	E	I	P	A	R
E	I	C	A	R	P	D	U	B
R	P	A	U	B	D	I	C	E

Že ony tři různé bloky nám vyhovují (sudokují) jak vedle sebe, tak pod sebou, můžeme opět vysvětlit pomocí tří trojic písmen, které nově barevně rozlišíme v prvních třech řádcích a prvních třech sloupcích:

P	A	R	B	D	U	C	E	I
D	U	B	E	I	C	A	R	P
I	C	E	R	P	A	U	B	D
C	E	I	P	A	R	B	D	U
A	R	P	D	U	B	E	I	C
U	B	D	I	C	E	R	P	A
B	D	U	C	E	I	P	A	R
E	I	C	A	R	P	D	U	B
R	P	A	U	B	D	I	C	E

Méně přehledné zaplnění má tabulka sudoku na další stránce. Není úplně běžná, protože v ní chybí sedmičky, které jsou nahrazeny nulami. Jsou v ní červeně vyznačena data, na která se budeme odvolávat v další části textu, kterou věnujeme několika momentům jak z historie Pardubic, tak z historie

naší soutěže.

1	2	9	5	0	6	3	4	8
8	5	6	1	3	4	0	9	2
4	3	0	2	9	8	5	1	6
0	4	5	8	6	1	9	2	3
3	6	1	9	5	2	4	8	0
2	9	8	0	4	3	6	5	1
5	0	2	6	1	9	8	3	4
6	1	4	3	8	5	2	0	9
9	8	3	4	2	0	1	6	5

První dochovanou písemnou zprávou o Pardubicích je jedna papežská listina z roku **1295**. Je v ní zmíněn již existující pardubický klášter spolu s dalšími kláštery cyriaků, jinak mnichů špitálského řádu křižovníků s červeným srdcem.

Nejstarším dokladem o existenci Pardubic jako města je závěť z roku **1340**, kterou sepsal rytíř *Arnošt z Hostýně*, zakladatel šlechtického rodu, označovaného později jako páni z Pardubic. Ze čtyř synů Arnošta z Hostýně se nejvíce proslavil ten nejstarší, stejnojmenný Arnošt, kterého známe z dějepisu již pod jménem *Arnošt z Pardubic*. Stal se historicky prvním pražským arcibiskupem a byl nejbližším rádcem a důvěrníkem císaře Karla IV.

Přeskočme však šest století od počátků Pardubic k počátkům naší soutěže. První, tehdy československé finále matematické olympiády se konalo v jednu červnovou neděli roku **1952**. Účastníci z celé republiky se sjeli do Prahy již v sobotu a navštívili večerní představení v tehdejší *Komorním divadle*. Ve vlastní nedělní soutěži pak zvítězil žák *Juraj Bosák* z Bratislavy, budoucí přední slovenský matematik, který aktivně pracoval zejména v teorii grafů až do své náhlé smrti ve věku 54 let.



Zatímco v první dekádě naší soutěže se její finále konalo vždy v Praze, v dalších ročnících se dějišti těchto ústředních kol stávala různá města naší země, zejména krajská, ale i okresní, ba rovněž města i bez těchto správních titulů krásná a významná, kupříkladu Jevíčko a Litomyšl z kraje Pardubického. Do jeho sídla, krajského města Pardubice, se naše finále vrací po relativně dlouhé době 33 let, tedy poprvé od roku 1983. Tehdejší účastníci již čtyřdenní květnové akce si mohli kromě vlastního počítání také užít besedy s účastníky mistrovství světa v ledním hokeji. Nevzpomněl jsem to jen tak — lední hokej totiž patří, vedle perníku, ploché dráhy a koňských dostihů, k městu Pardubice neodmyslitelně. A tak je v naší historické tabulce sudoku chronologicky správně uveden rok 1923, ve kterém byl založen slavný hokejový klub *Dynamo Pardubice*.

Od hokeje však zpět k matematické olympiádě, jejíž 65. ročník právě vrcholí. Píše se, jak je upomenuto v posledním řádku tabulky, **třetí duben 2016** a my v krásném prostředí pardubického zámku zahájíme letošní finále naší soutěže. Rád bych při této příležitosti všem přítomným představil čtyři své kolegy, kteří dlouhá léta naplno pracovali a dosud pracují pro matematickou olympiádu. Požádám tak zdvořile, aby se ke mně dostavili pánové *Jaroslav Švrček* (autor stovek úloh, místopředseda od r. 2001), *Dag Hrubý* z Jevíčka (3 finále 1993–1995, 23 soustředění od r. 1993), *Karel Horák* (redaktor textů, tajemník od r. 1982) a *Leo Boček* (tajemník 1978–1987, předseda 1988–2001). Myslím, že si pánové zasloužíte uznalý potlesk všech přítomných. (. . .) Dovolte, milí kolegové, abych vám předal jako upomínku na dnešní den malé, prozatím v krabičkách ukryté suvenýry, otevřete je však prosím, až na to zřejmě přijde čas v průběhu mého dalšího povídání. (. . .) Děkuji, přátelé, můžete se laskavě vrátit na svá místa. (. . .)

Úvodem další části svého vyprávění o tabulkách sudoku zdůrazním rozdíl mezi oběma finálovými kategoriemi A a P naší olympiády. Soutěžící programovací kategorie P, kterou tady v Pardubicích zahájíme v nejbližší středu, řeší úlohy na sestavení algoritmů, tj. postupů k řešení určité úlohy, jakou třeba může být vlastní hra sudoku. Ta však na programu kategorie P určitě nebude, protože algoritmy pro sudoku jsou po řadu let dobře známy, a různé počítačové programy, jak hrát sudoku, jsou k mání na internetu. Naproti tomu soutěžící kategorie A budou již zítra a pozítří řešit původní, poměrně obtížné úlohy z různých oblastí teoretické matematiky, která se zabývá otázkami, jimž nějaké bezprostřední praktické uplatnění

často zjevně chybí. Kupříkladu v souvislosti s hrou sudoku některé matematiky počátkem 21. století napadla otázka, jakým postupem zjistit počet N všech správných tabulek sudoku z číslic 1 až 9. Zdůrazňuji, že předmětem zájmu těchto matematiků nebyla samotná hodnota

$$N = 6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \doteq 6,67 \cdot 10^{21};$$

prakticky vzato, je totiž úplně jedno, zda je to číslo řádu 10^{21} nebo třeba „jen“ 10^{18} . Tyto matematiky více zajímal samotný *postup*, jak se k hodnotě N dobrat, když zjevně je zcela nemožné na počítači probrat všechny tabulky 9×9 , a to ani při triviálních redukcích, které každého matematika rychle napadnou.

Historicky první zveřejnění čísla N se datuje do roku 2003, když na dotyčné internetové stránce neznámý autor pod značkou QSCGZ nepodal žádné vysvětlení svého výpočtu. Teprve v roce 2006 se na internetu objevil příspěvek

- Bertram Felgenhauer, Frazer Jarvis: *Enumerating possible Sudoku grids*,

v němž autoři hodnotu N ohlášenou v roce 2003 potvrdili a podložili pěknými matematickými úvahami, spojenými, nutno přiznat, s rozsáhlými, avšak v reálném čase zvládnutelnými výpočty na počítači.

Nebojte se, tyto úvahy dnes tady rozvádět nebudu. Poznamenám jen, že v mnoha pojednáních o tabulkách sudoku se hodnota N zapisuje ve tvaru součinu

$$N = 9! \cdot 72^2 \cdot 2^7 \cdot 27\,704\,267\,971,$$

kde poslední činitel je prvočíslo. Věřím, že nejen pro přítomné soutěžící bude srozumitelné následující vysvětlení, proč je číslo N skutečně násobkem čísla $9! \cdot 72^2$. K tomu nám stačí ukázat, že všechny tabulky sudoku lze rozdělit do stejněpočetných skupin po $9! \cdot 72^2$ exemplářích.

Vezměme tedy jednu tabulku sudoku, která má v levém horním rohu

čísllice od 1 po 9 v pořadí jako na dalším obrázku.

1	2	3	*	*	*	*	*	*
4	5	6	*	*	*	*	*	*
7	8	9	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*

Z této tabulky budeme získávat další tabulky sudoku se stejným levým horním blokem, jaký má původní tabulka, a to kombinacemi těchto úprav: permutacemi prostřední trojice řádků, permutacemi dolní trojice řádků, výměnou prostředního a spodního pruhu trojice řádků, a podobnými permutacemi prostředních a pravých trojic sloupců a výměnou obou příslušných pruhů trojic sloupců. Popsaných permutací posledních šesti řádků (včetně jejich původního pořadí) je $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$, právě tolik je i popsaných permutací posledních šesti sloupců. Úvahou o číslech zapsaných v prvním řádku a prvním sloupci výsledných tabulek zjistíme, že popsáním způsobem jsme vnořili jednu výchozí tabulku do skupiny 72^2 různých tabulek. Každou takovou skupinu pak početně zvětšíme $9!$ -krát cestou přeznačení číslic od 1 do 9 jejich libovolnou permutací. Takto zřejmě rozdělíme do oněch skupin všechny tabulky sudoku. Tím je slíbené vysvětlení u konce. Jen bych chtěl upozornit, že právě podaná poměrně triviální úvaha o sestavených stejně početných skupinách tabulek ani zdaleka ještě není dostatečným teoretickým podkladem pro počítačové určení hledaného čísla N .

Milí přítomní, tabulky sudoku neopustím, ani když teď přejdu k číslu, které znají všichni školáci z výpočtu obvodu a obsahu kruhu a které hraje významnou roli i ve vyšší matematice. Má dekadický zápis

3,141592653589793238462643383279502...

Ano, jde o číslo π , v naší části Evropy též zvané Ludolfovo číslo. Jak jsem se doslechl asi před rokem v Českém rozhlase, podotýkám že to nebylo

v magazínu *Meteor*, nýbrž v pásmu *Dobré ráno, Česko!*, tak přestože už jsou známy bilióny číslic čísla π za desetinnou čárkou, nejvýkonnější počítače současnosti objevují jeho další a další číslice, a proto pořád není jasné, zdali to číslo π vůbec někde končí (sic!).

Soustředíme se však pouze na vypsání číslice a povšimněme si, že první nula čísla π se nachází relativně daleko za desetinnou čárkou. Což takhle dostat co největší počet předchozích číslic po skupinách do řádků nějaké kuriózní tabulky sudoku, sestavené jako obvykle z číslic od jedničky po devítku? Když jsem o tomto svém podivínském nápadu nic na internetu nenašel, pustil jsem se sám do následujících úvah. Do prvního řádku tabulky bychom mohli dostat pouze trojčíslí 314,

3,141592653589793238462643383279502 . . . ,

většímu počtu číslic už brání následující jednička. Zato v dalším využitém řádku tabulky by mohlo být pětičíslí 15926,

3,141592653589793238462643383279502 . . . ,

za kterým ovšem následuje už zastoupená pětka. Podobně v dalším řádku by mohlo být pouze dvojčíslí 53, v dalším čtyřčíslí 5897, v dalším trojčíslí 932, v dalším pětičíslí 38462:

3,141592653589793238462643383279502 . . .

Pokud to počet řádků a požadovaná sudokost tabulky dovolí, do některých jejích dalších řádků bychom ještě mohli dostat trojčíslí 643, dvojčíslí 38 a, v ideálním případě, i pětičíslí 32795, za kterým už následuje osudná nula:

3,141592653589793238462643383279502 . . .

Povšimněte si prosím nečekané náhody: *vytvořili jsme celkem devět skupin číslic*, tedy právě tolik, kolik je všech řádků každé tabulky sudoku (sic!). Podobná souhra okolností zapůsobí na mysl matematika okamžitým účinkem tak, jako na duši zloděje zvuk krátkého zaklapnutí železek. Ano, matematik je vskutku polapen a v následující hodiny, dny a často i delší časové údobí jen stěží odvrací svou mysl od dotyčného problému, doslova se přemáhá, aby se zabýval také něčím jiným, co se od něj v práci nebo doma očekává.

Věnujme se však věcně, s minimem emocí, nastolené konkrétní otázce:
Je možné v následující tabulce

3	1	4						
1	5	9	2	6				
5	3							
5	8	9	7					
9	3	2						
3	8	4	6	2				
6	4	3						
3	8							
3	2	7	9	5				

posunout předepsané skupiny číslic v jednotlivých řádcích tak, abychom tím získali správný základ pro sestavení některé tabulky sudoku? Není těžké se přesvědčit, že existují desítky postavení oněch skupin, které vypadají nadějně v tom smyslu, že zastoupené číslice v jednotlivých řádcích, sloupcích i blocích jsou navzájem různé. Ukáži vám kupříkladu jedno (z 13 možných) nadějných postavení, kdy trojice 314 zůstane v původní poloze:

3	1	4						
			1	5	9	2	6	
						5	3	
	5	8	9	7				
9	3	2						
			3	8	4	6	2	
6	4	3						
						3	8	
			3	2	7	9	5	

A k tomu ještě jedno postavení, při kterém je trojice 314 posunuta o 1 pole doprava:

	3	1	4					
			1	5	9	2	6	
							5	3
	5	8	9	7				
	9	3	2					
			3	8	4	6	2	
					6	4	3	
3	8							
				3	2	7	9	5

Začnete-li třeba namátkou tato postavení testovat, tj. brát je jako zadání hry sudoku a určovat pak další číslice, které logicky patří do dosud neobsazených polí, brzy získáte pocit, že byste museli mít štěstí jako v loterii, abyste celou tabulku správně vyplnili. Zpravidla již po několika krocích vždy s rozčarováním zjistíte, že dané výchozí postavení je pro hru sudoku chybné. Co je však ještě více deprimující, nemůžete vyloučit, že některé postavení je přece jen správné, dokud všechny možnosti systematicky neproberete. Nesvěříte-li to testování počítači, může být každá vaše chvilková nepozornost osudná.

Hypotézu o málo pravděpodobné existenci správného postavení devíti skupin se mi posléze podařilo podpořit způsobem, který lze ověřit bez počítače, tedy s tužkou a papírem. Při něm se nejprve soustředíme pouze na skupiny číslic 5897, 932 a 38462 pro prostřední trojici řádků. Poměrně rychle lze zjistit, že tato trojice má pouze 24 nadějných vzájemných rozestavení a

že z těchto 24 zadání hry sudoku pouze jediné není chybné a vypadá takto:

	5	8	9	7	1			
		9	3	2	5			
		3	8	4	6	2		

Ke třem červeně vyznačeným skupinám číslic jsme rovnou ještě připsali modře zbylé dvě číslice, které pak patří do prostředního bloku: zřejmě pětka pod jedničku.

Nyní vezmeme do hry pěťici číslic 15926 pro druhý řádek a podíváme se, kam bychom ji mohli nadějně umístit. Snadno zjistíme, že pro ni máme jedinou možnou pozici:

		1	5	9	2	6		
	5	8	9	7	1			
		9	3	2	5			
		3	8	4	6	2		

Teď podobně otestujeme pěťici 32795 pro poslední řádek. Zjistíme, že žádnou nadějnou pozici tato pěťice už nemá, a tím se náš sen definitivně rozplývá. Ač neradi, zdůvodnili jsme právě, že *kýžené postavení všech devíti skupin číslic π neexistuje*. Zbývá se jen ujistit, zdali člověk něco nepřehlédl, zejména znovu projít všech 24 postavení pro prostřední trojici řádků. Pak už se můžeme, podle osobního vkusu, jen oddat nějaké formě truchlení.

Novou naději, jak do jedné tabulky sudoku dostat po řádcích všechny číslice π až po první nulu, mi přinesl nečekaný nápad: K určenému rozestavení skupin číslic 5897, 932 a 38462 v prostřední trojici řádků nadějně připsat pětice 15926 a 32795 do patřičných řádků tak, že první pětici „roztrhneme“ následujícím způsobem:

5	9	2	6					1
	5	8	9	7	1			
		9	3	2	5			
		3	8	4	6	2		
				3	2	7	9	5

Tato „roztržka“ bude mít zatraceně dobrý smysl, když tabulku svineme a po obou svislých hranách slepíme do tvaru válce, na jehož plášti pak bude pětičíslí 15926 souvislé. Ani sudokost takto svinuté tabulky svůj význam neztratí!

Po této resuscitaci už vše další šlo ráz naráz, ani netušíte jak rychle. Snadno se našly nadějně pozice pro zbývající skupiny číslic (když i trojice 643 musela být roztržena) a — světe div se — doplnění do tabulky sudoku bylo poté podobně jednoduchým úkonem, jakým si šťastlivec kupuje v loterii vítězný los.

ČÍSLICE π PO PRVNÍ NULU

8	3	1	4	5	7	9	2	6
5	9	2	6	8	3	4	7	1
7	4	6	2	1	9	5	3	8
2	5	8	9	7	1	6	4	3
4	6	9	3	2	5	8	1	7
1	7	3	8	4	6	2	5	9
3	2	5	7	9	8	1	6	4
9	1	7	5	6	4	3	8	2
6	8	4	1	3	2	7	9	5

© J. ŠIMŠA, 2016

Zhmotněný výsledek mého snažení vám teď předvedu *in natura*. Je to onen suvenýr, který jsem před chvílí předal svým přátelům. Exemplář, který držím v ruce, teď rád věnuji paní Soně Křišťanové, předsedkyni krajské komise MO Pardubického kraje. (...)

Dámy a pánové, v úplném závěru svého vystoupení chci popřát všem soutěžícím hodně vytrvalosti a šťastných nápadů při řešení nesnadných matematických úloh a úspěšná překonávání dílčích nezdarů, což si ovšem nebudou moci usnadňovat jako já lepením svých protokolů do ruliček. Svůj dnešní projev ukončím ještě jednou původní písmenkovou tabulkou sudoku:

H	M	E	T	!	C	V	I	A
V	A	T	I	H	E	M	!	C
C	I	!	V	M	A	T	H	E
!	C	M	A	T	I	E	V	H
T	V	I	M	E	H	C	A	!
E	H	A	!	C	V	I	T	M
A	!	V	E	I	M	H	C	T
M	T	H	C	V	!	A	E	I
I	E	C	H	A	T	!	M	V

VIVAT MATHEMATICA!