

Křovákovo zobrazení a souřadnicový systém S-JTSK



Matematická kartografie

Obsah

1. Základní charakteristiky zobrazení
2. Postup transformace zeměpisných souřadnic do zobrazovací roviny
3. Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím
4. Meridiánová konvergence
5. Zákony zkreslení



1

ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY ZOBRAZENÍ

Základní charakteristiky zobrazení

- Po vzniku ČSR budovány základy nového státního mapového díla – zejména pro katastrální účely.
- Ing. Josef Křovák (1884 - 1951)
- V roce 1922 navrhl **konformní kuželové zobrazení v obecné poloze** jako součást geodetického referenčního **systemu jednotné trigonometrické sítě katastrální (S-JTSK)**.



Další soutěžní návrhy:

http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/cechy.html#navrhy

Základní charakteristiky zobrazení

- Od roku 1922 používáno jako prozatímní.
- Od roku 1933 do roku 1938 používáno jako definitivní.
- Znovu zavedeno po druhé světové válce.
- V padesátých a šedesátých letech 20. století se státní mapy velkých měřítek vyhotovovaly v Gaussově zobrazení s třístupňovými poledníkovými pásy.
- Od roku 1968 začaly probíhat práce na Základní mapě středního měřítká. Opět použito Křovákovo zobrazení.

Základní charakteristiky zobrazení

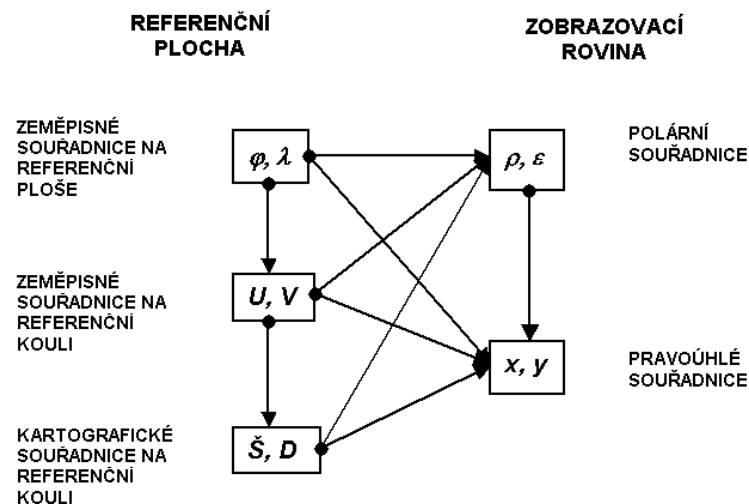
- Zobrazení definováno s ohledem na tvar území bývalé ČSR tak, aby minimalizovalo na tomto území délkové zkreslení. Dnes je používáno pouze v České a Slovenské republice.
- V současné době jsou v tomto zobrazení vydávána státní mapová díla určená pro státní správu a samosprávu (viz Nařízení vlády ČR 430/2006). Jedná se zejména o:
 - Katastrální mapy v měřítku 1:1000 (DKM a KMD)
 - Státní mapu v měřítku 1 : 5 000
 - Základní mapy ČR
 - ...

Základní charakteristiky zobrazení

Gaussovo zobrazení šlo nejkratší cestou, Křovákovo nejdelší.
Křovákovo zobrazení je **dvojitě zobrazení**. Co to znamená?

$$\varphi, \lambda \rightarrow U, V \rightarrow \check{S}, D \rightarrow R, D'(\rho, \varepsilon) \rightarrow X, Y$$

↓
polární souřadnice v rovině



Postup transformace:

1. Zobrazení Besselova elipsoidu na kouli
2. Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické
3. Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení
4. Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé

2

POSTUP TRANSFORMACE ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC DO ZOBRAZOVACÍ ROVINY

Zobrazení Besselova elipsoidu na kouli

- Besselův elipsoid je zobrazen na kouli s jednou nezkreslenou rovnoběžkou $\varphi_0 = 49^\circ 30'$, která probíhá přibližně středem území ČSR.
- Použito Gaussovo konformní zobrazení z elipsoidu na kouli.



$$r = \sqrt{M_0 N_0}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) = k \left[\operatorname{tg}^\alpha\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]$$

$$V = \alpha \lambda$$

$$r = 6\,380\,703,6105 \text{ m}$$

$$k = 1,0034191640$$

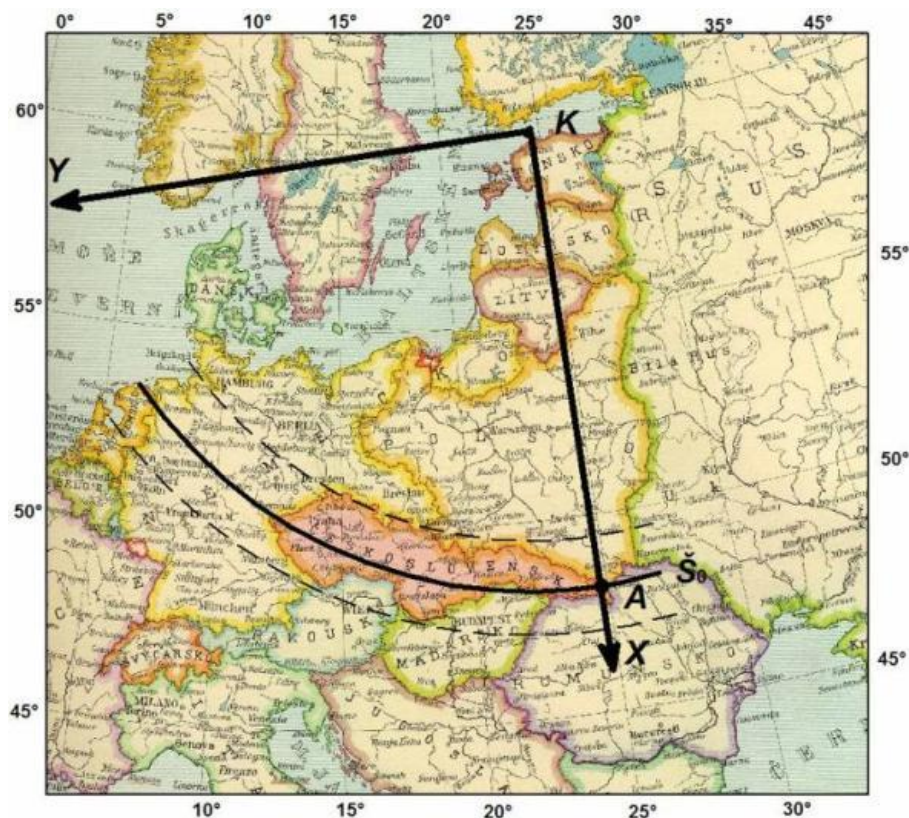
$$\alpha = 1,000597498372$$

Vysvětlení konstant a odvození vzorců viz kap. 5.

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

- Na kouli jsou definovány kartografické souřadnice \check{S} , D - kvůli protáhlému a mírně stočenému tvaru ČSR.
- Osa území - základní kartografická rovnoběžka \check{S}_0 .
- Na ní zvolen bod A za nejvýchodnějším bodem státu.
- Následně je určena poloha kartografického pólu K.
- Základní kartografická rovnoběžka $\check{S}_0 = 78^\circ 30'$.
- Celé území ČSR leží v úzkém pásu mezi dvěma kartografickými rovnoběžkami v relativně malé vzdálenosti $\Delta\check{S} = 2^\circ 31'$, což je asi 280 km.

$$\begin{aligned} \varphi_A = 48^\circ 15' &\rightarrow U_A = 48^\circ 12' 42,69689'' \\ \lambda_A = 42^\circ 30' &\rightarrow V_A = 42^\circ 31' 31,41725'' \\ U_K &= 59^\circ 42' 42,69689'' \\ V_K &= 42^\circ 31' 31,41725'' \end{aligned}$$

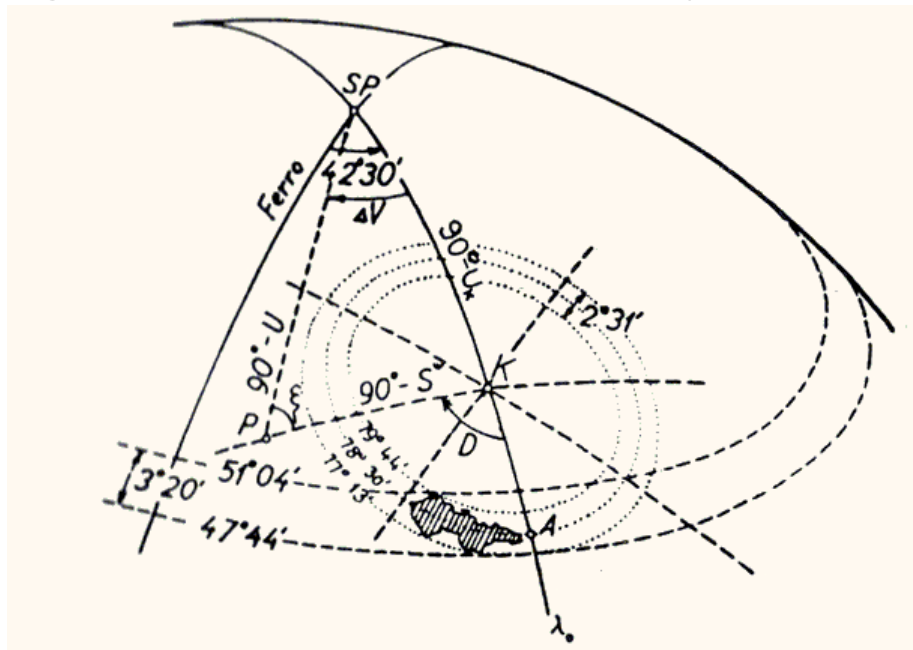


Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

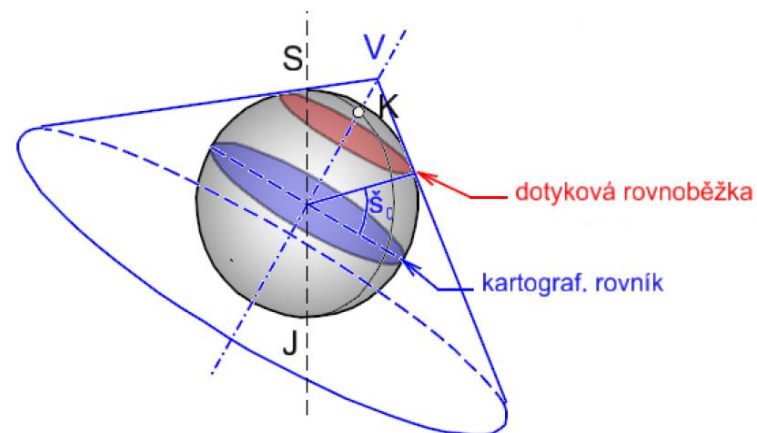
- Máme bod A na kartografické rovnoběžce \check{S}_0 , jak z něj spočítat pól K?
- V prezentaci máme vzorce ze 2 nebo ze 3 bodů...

$$\begin{aligned} \check{S}_0 &= 78^\circ 30' \\ U_A &= 48^\circ 12' 42'',69689 \\ V_A &= 42^\circ 31' 31'',41725 \\ U_K &= 59^\circ 42' 42'',69689 \\ V_K &= 42^\circ 31' 31'',41725 \end{aligned}$$

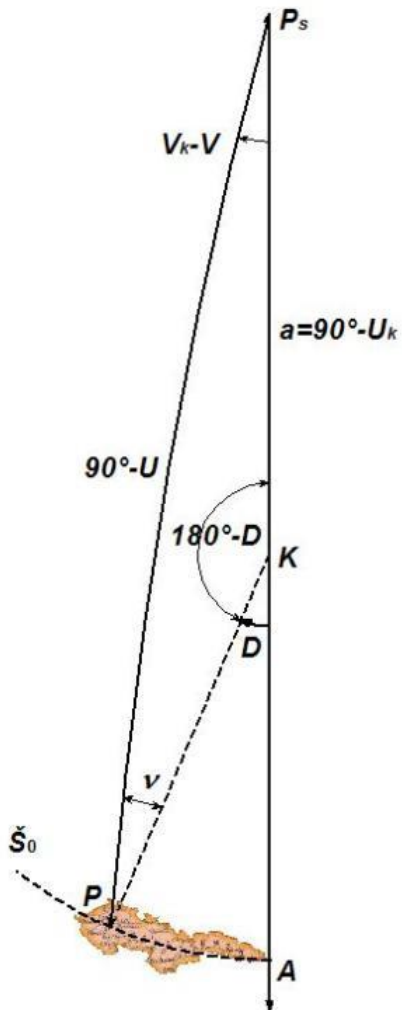
Ing. Křovák ho určil „empiricky“ – kružítkem.



Kartografický pól K je obraz vrcholu kužele V.
Vrchol kužele je relativně nízko nad terénem, asi 130 km.



Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické



Převod zeměpisných souřadnic na kartografické – rovnice viz kap. 1:

$$\sin \check{S} = \sin U \cos a + \cos U \sin a \cos(V - V_k)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k)$$

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

Máme definovány body A a K: $\varphi_A = 48^\circ 15'$ $U_A = 48^\circ 12' 42'', 69689$ $U_K = 59^\circ 42' 42'', 69689$
 $\lambda_A = 42^\circ 30'$ $V_A = 42^\circ 31' 31'', 41725$ $V_K = 42^\circ 31' 31'', 41725$



1 A
Chernyshkovskiy
48.2500000N, 42.5000000E

2 K
Ruská federace
N 59°42.00000', E 42°31.00000'

X Smazat body

Přidat do oblíbených

Sdílet

Exportovat

Kde je chyba?

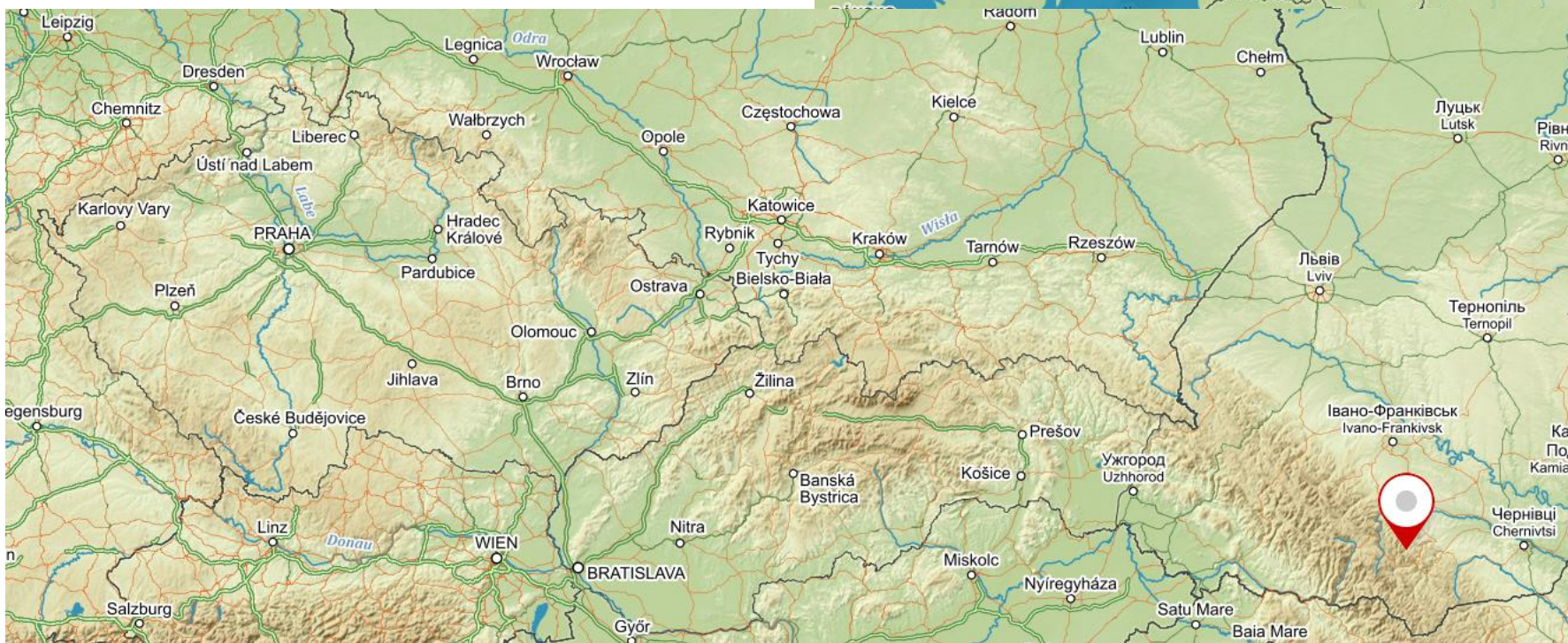
Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

$$\varphi_A = 48^{\circ}15'$$
$$\lambda_A = 42^{\circ}30'$$

Souřadnice jsou měřeny od ferrského poledníku.

$$\varphi_A = 48^{\circ}15'$$
$$\lambda_A = 24^{\circ}50'$$

od greenwichského poledníku



Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

Ferrský poledník

El Hierro [el'jero] – nejzápadnější ostrov Kanárských ostrovů

Od antiky západní konec známého světa.

1634 – odsouhlasen jako základní poledník většinou Evropy

Jeho souřadnice podle greenwichského poledníku?

$$42^{\circ}30' - 24^{\circ}50' = 17^{\circ}40'$$

Proč Ing. Křovák použil ferrský poledník?

Ing. Křovák byl zeměměřič. Zobrazení mělo být hlavně pro katastr.

V jakém zobrazení byly katastrální mapy Rakousko-Uherska?

Cassini-Soldnerovo zobrazení

Transverzální válcové zobrazení – není konformní!

Zeměpisné délky λ jsou počítány k poledníku Ferra.

Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení

- Pro zobrazení referenční koule do roviny je použito Lambertovo jednoduché konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou.

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n$$
$$\varepsilon = nV$$
$$\rho_0 = m_0 R \cotg U_0$$
$$n = \sin U_0$$

vzorce kuželového konformního zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

- Z důvodů zmenšení absolutní hodnoty zkreslení se dodatečně zkresluje pomocí měřítkového faktoru $m_0 = 0,9999$. Zmenší se tak poloměr koule.
- Vzniknou tak dvě nezkreslené rovnoběžky:
 $\check{S}_1 = 79^\circ 18' 03''$
 $\check{S}_2 = 77^\circ 40' 50''$
Základní rovnoběžka $\check{S}_0 = 78^\circ 30'$
Není tedy uprostřed.

Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení

zobrazovací rovnice:

$$R, D'(\rho, \varepsilon)$$

$$R = R_0 \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}}{2} + 45^\circ \right)} \right]^n$$

$$D' = nD$$

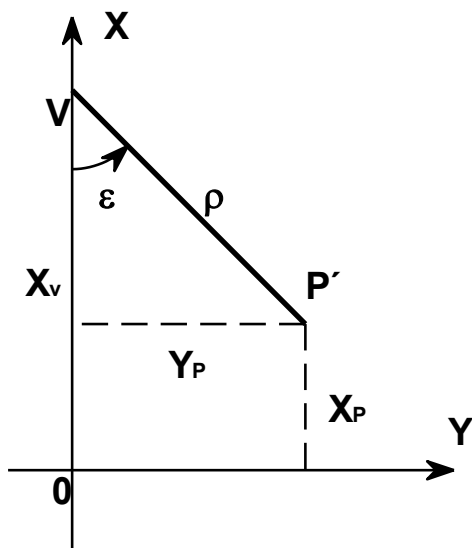
$$R_0 = m_0 r \operatorname{cotg} \check{S}_0$$

$$n = \sin \check{S}_0$$

$$R_0 = 1\,298\,039,0046 \quad n = 0,9799247046 \quad m_0 = 0,9999$$

Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé

Lambertovo konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou kartografickou rovnoběžkou \mathring{S}_0 .



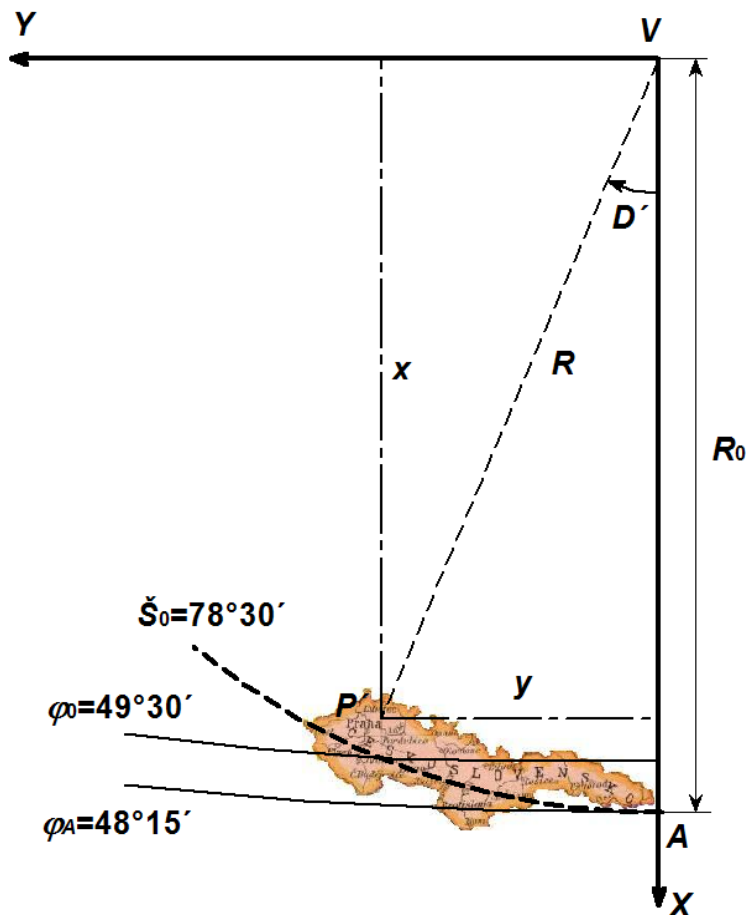
Obecný tvar výpočtu rovinných souřadnic pro kuželová zobrazení:

$$x = x_v - \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

Jenže Ing. Křovák sloučil počátky polární a pravoúhlé soustavy.

Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé



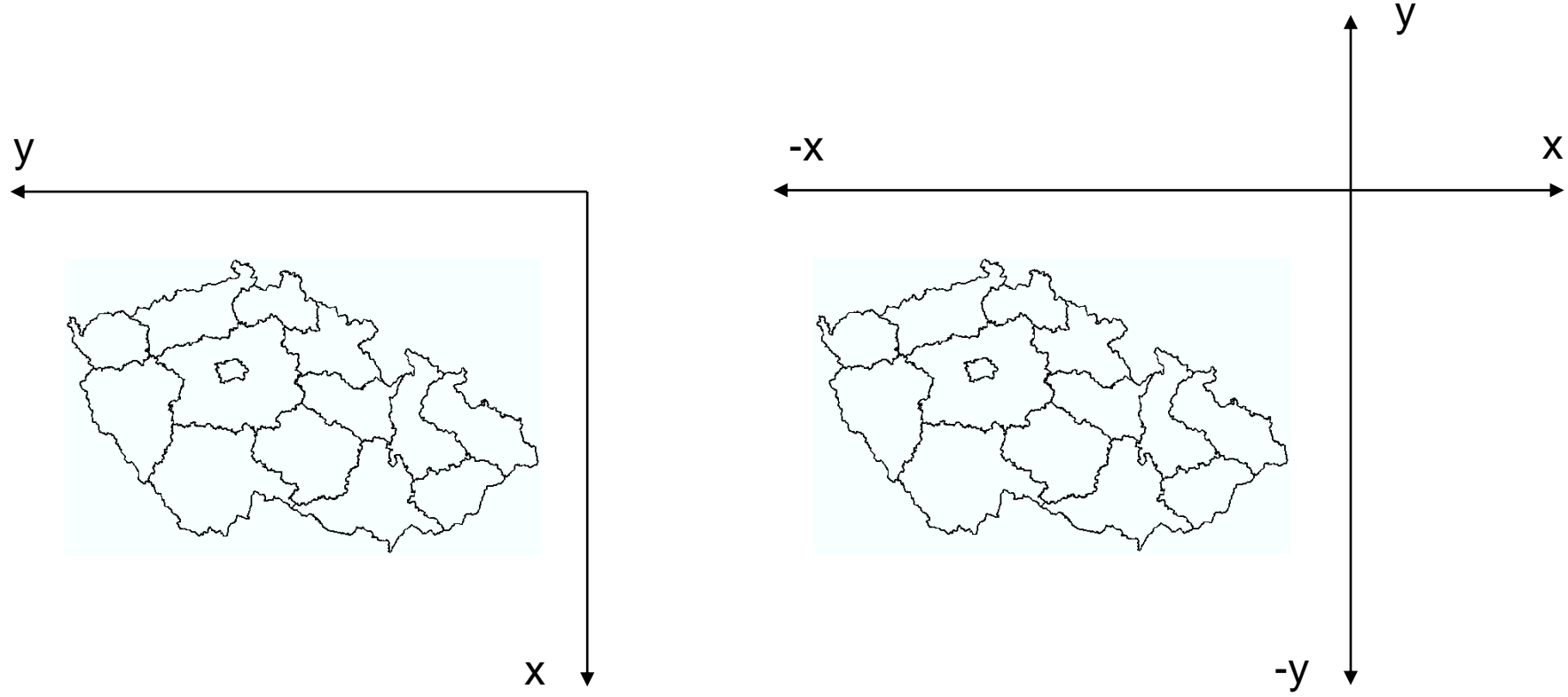
$$x = R \cos D'$$

$$y = R \sin D'$$

Kontrola správného pořadí souřadnic:
 $y < x$

Směry os - programátoři GIS a databází jsou zoufalí.

S-JTSK Krovak x S-JTSK Krovak EastNorth



S-JTSK Krovak x S-JTSK Krovak EastNorth

S-JTSK EastNorth má v definici (v souboru PRJ), že otáčí původní systém Křováka o 90° a osu x násobí -1.

S-JTSK_Krovak

Projection: Krovak

False_Easting: 0,00000000

False_Northing: 0,00000000

Pseudo_Standard_Parallel_1:78,50000000

Scale_Factor: 0,99990000

Azimuth: 30,28813975

Longitude_Of_Center: 24,83333333

Latitude_Of_Center: 49,50000000

X_Scale: 1,00000000

Y_Scale: 1,00000000

XY_Plane_Rotation: 0,00000000

Linear Unit: Meter

S-JTSK_Krovak_East_North

Projection: Krovak

False_Easting: 0,000000

False_Northing: 0,000000

Pseudo_Standard_Parallel_1: 78,500000

Scale_Factor: 0,999900

Azimuth: 30,288140

Longitude_Of_Center: 24,833333

Latitude_Of_Center: 49,500000

X_Scale: -1,000000

Y_Scale: 1,000000

XY_Plane_Rotation: 90,000000

Linear Unit: Meter



3

INVERZNÍ FUNKCE K ZOBRAZOVACÍM ROVNICÍM

Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím

Zpětná transformace se řeší podle postupu: $X, Y \rightarrow R, D' \rightarrow \check{S}, D \rightarrow U, V \rightarrow \varphi, \lambda$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\check{S} = 2 \left\{ \arctan \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^\circ \right) \sqrt[n]{\frac{R_0}{R}} \right] - 45^\circ \right\}$$

$$U = \arcsin(\cos a \sin \check{S} - \sin a \cos \check{S} \cos D)$$

$$D' = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$D = \frac{D'}{\sin \check{S}_0}$$

$$V = V_k - \arcsin \left(\frac{\cos \check{S}}{\cos U} \sin D \right)$$

Výpočet zeměpisné šířky se provádí v iteracích – φ je na obou stranách rovnice:

$$\varphi^{(0)} = 2 \left\{ \arctan \left[\frac{1}{k} \left(\tan \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \right) \left(\frac{1 + e \sin U}{1 - e \sin U} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45^\circ \right\}$$

$$\lambda = \frac{V}{\alpha}$$

Vypočítaná zeměpisná délka je od poledníku Ferra.

$$\varphi^{(i)} = 2 \left\{ \arctan \left[\frac{1}{k} \left(\tan \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi^{(i-1)}}{1 - e \sin \varphi^{(i-1)}} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45^\circ \right\}$$

kde $i = 1, 2, \dots$

Tři iterace většinou stačí.



4

MERIDIÁNOVÁ KONVERGENCE

Meridiánová konvergence

Úhel mezi rovnoběžkou s osou x a obrazem místního zeměpisného poledníku.
Směr osy x na mapě není totožný se směrem sever-jih.

v rovině: $\gamma = D' - \nu$

$$D' = \arctg \frac{y}{x}$$

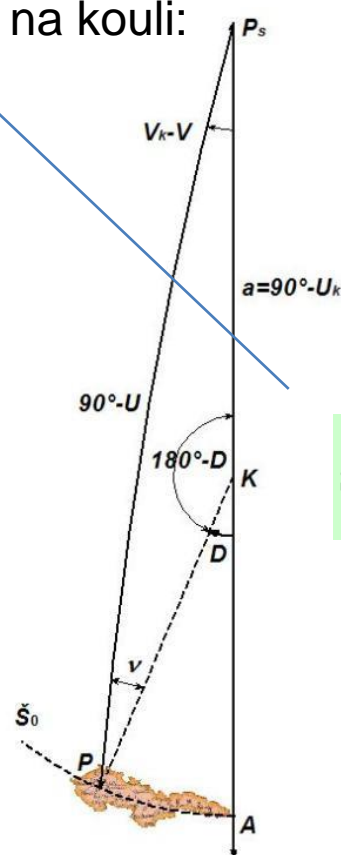
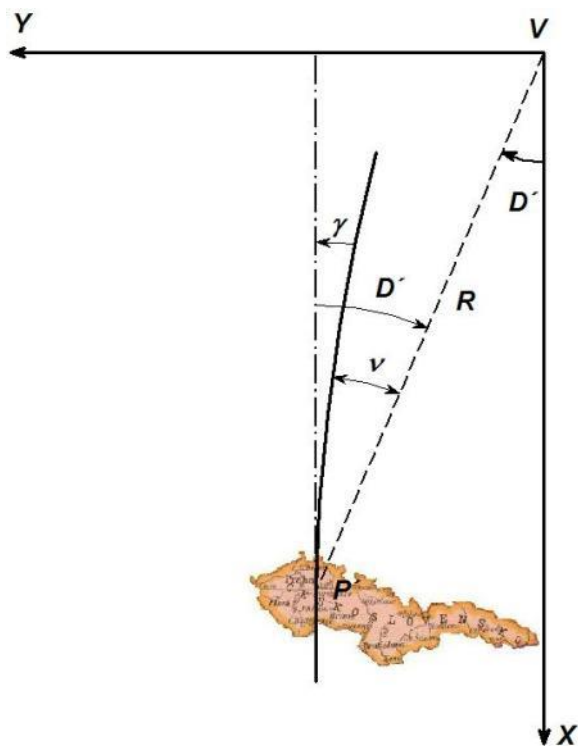
D' - polární souřadnice bodu (směrník) viz dříve – vzorce pro inverzní funkce

na kouli:

ν - úhel mezi obrazem zeměpisného a kartografického poledníku (azimut) - v konformním zobrazení se nezmění.
Lze ho tedy spočítat na kouli:

$$\sin \nu = \frac{\sin a}{\cos U} \sin D = \frac{\sin a}{\cos \check{S}} \sin (V_k - V)$$

A dosadit do rovnice v rovině.



Meridiánová konvergence

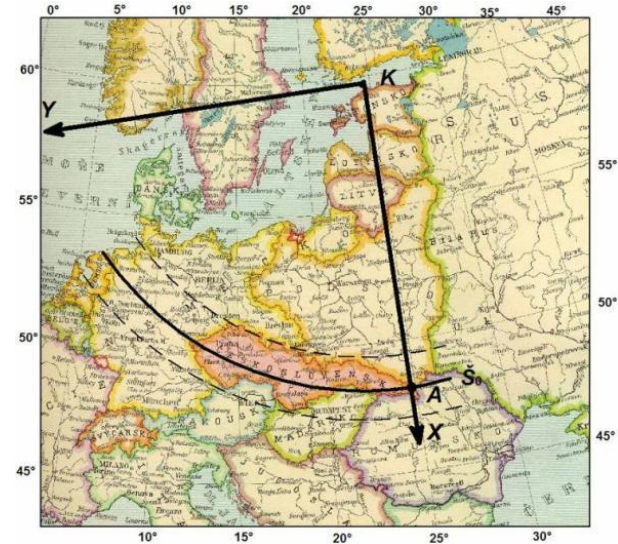
Varianta, když není nutná vysoká přesnost (jako i u Gaussova zobrazení):

$$\gamma = \sin \varphi \lambda$$

λ je odečítána od poledníku $\lambda_K = 42^\circ 30'$ východně Ferry, na kterém leží bod A a kart. pól K.

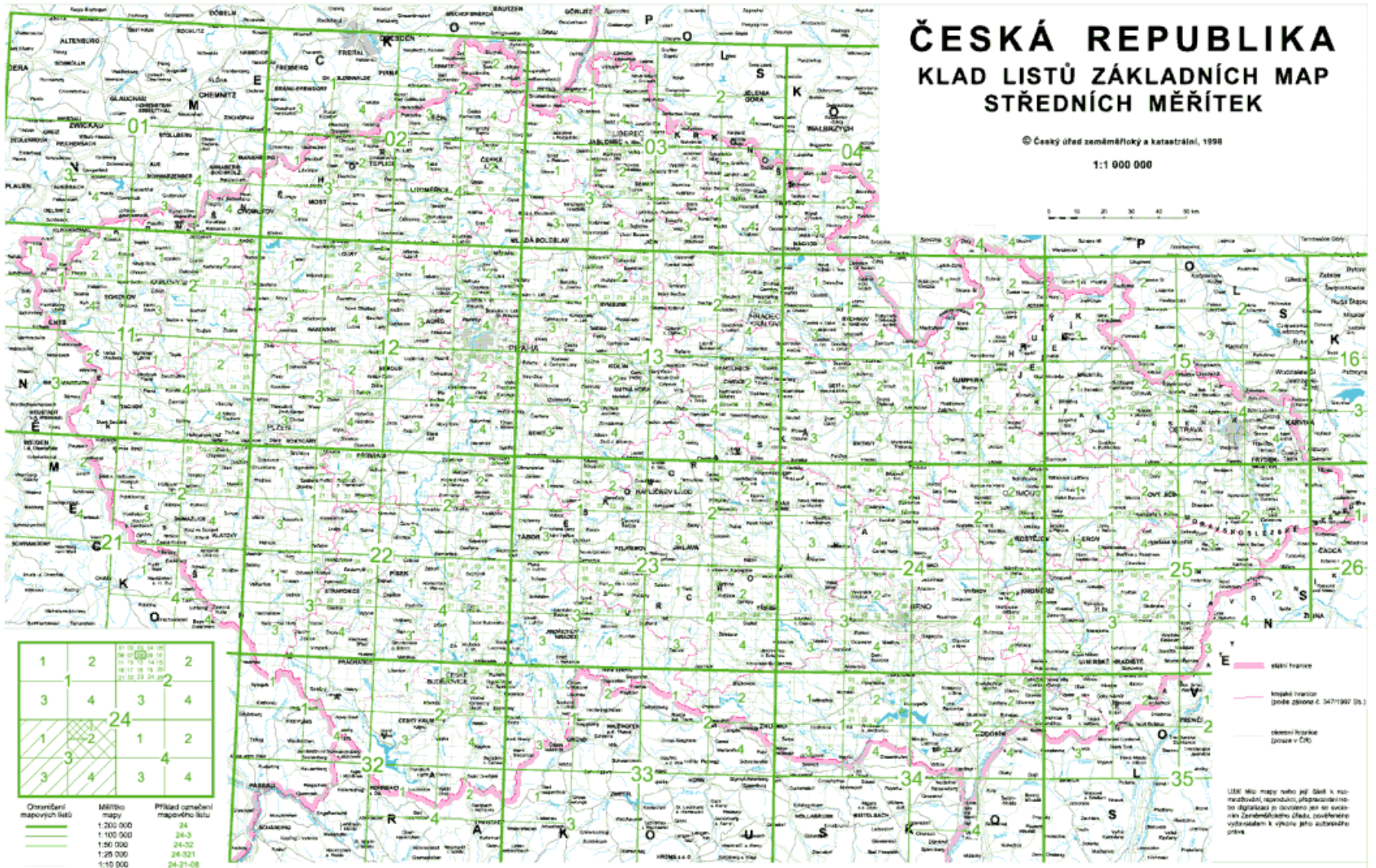
výpočet z rovinných pravoúhlých souřadnic:

$$\gamma = 0,008257 Y + 2,373 \frac{Y}{X} \text{ [km]} \text{ souřadnice } x, y \text{ v km}$$



- Na celém území bývalého Československa konvergence má pouze záporné znaménko.
- Tato skutečnost je obecně známá, hodnota konvergence se proto často uvádí bez znaménka.
- Na území ČR konvergence dosahuje hodnot od $-4^\circ 33'$ na východě území do $-9^\circ 35'$ na západě.

Klad mapových listů ZM



Klad mapových listů ZM

- Klad listů vychází ze základního měřítka 1:200 000.
- Pole map ZM200 jsou v rovině S-JTSK vymezena umělou konstrukcí pravidelně se sbíhajících čar, které velmi zhruba sledují obraz poledníků.
- Klad je tedy vytvořen uměle – neodpovídá poledníkům a rovnoběžkám.
 - Aby mapy nešly snadno využít vojensky.
- Listy ZM jsou pravidelné lichoběžníky.
- Délka základny listu kolísá od 47,03 cm (horní strana nejsevernějšího listu) do 49,22 cm (dolní strana nejjižnějšího listu).
- Výška libovolného listu je 38 cm.



5

ZÁKONY ZKRESLENÍ

Zákony zkreslení

- V Křovákově zobrazení stačí vypočítat pouze délkové zkreslení m . Proč?
- Plošné zkreslení bude jeho kvadrátem a úhlové zkreslení je zde nulové.
- Délkové zkreslení:
 - při zobrazení referenčního elipsoidu na kouli
 - při zobrazení koule do roviny
- Zkreslení při zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli v rozsahu území bývalého Československa je zanedbatelné.
 - Činí maximálně 0,07 mm/km v absolutní hodnotě.
 - V běžných výpočtech se neuvažuje.
- Zkreslení při zobrazení referenční koule do zobrazovací roviny kuželového zobrazení má v případě Křovákova zobrazení tvar:

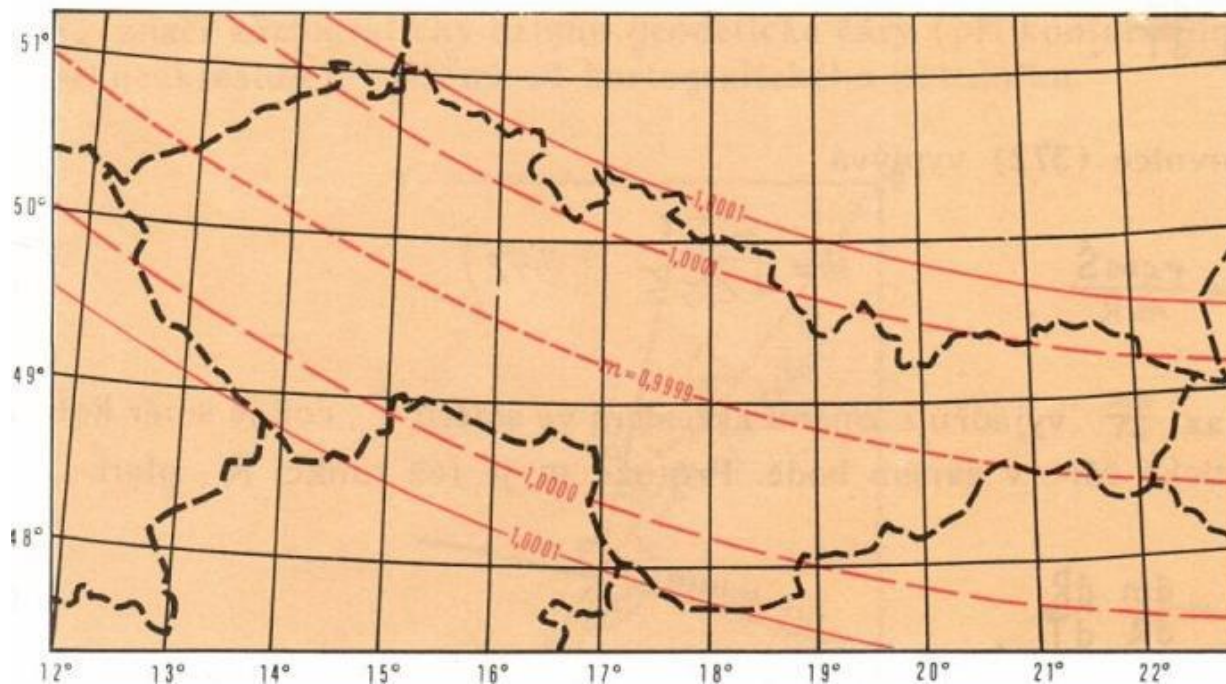
$$m = \frac{nR}{r \sin \check{S}}$$

Zákony zkreslení

Šikmé zobrazení, kartografické rovnoběžky a poledníky...

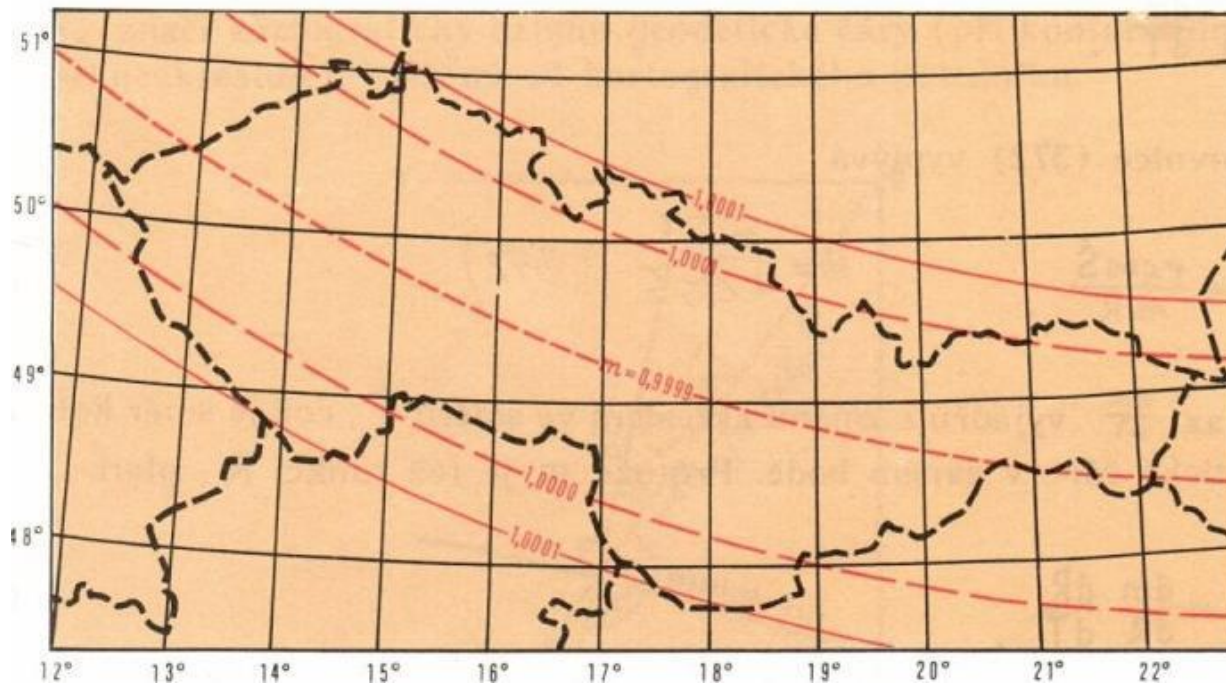
Jaký tvar mají zeměpisné poledníky a rovnoběžky?

- Složité křivky.
- Na území ČSR je však možné je nahradit přímkami a soustřednými kružnicemi.



Zákony zkreslení

- Nezkreslené rovnoběžky jsou vzdálené od základní rovnoběžky 89 km na sever a 91 km na jih.
- Základní kartografická rovnoběžka tedy není uprostřed mezi nimi.
- Ekvideformáty mají tvar kartografických rovnoběžek.
- Na základní kartografické rovnoběžce je zkreslení -10 cm/km, na severních a jižních výběžcích republiky je dosaženo hodnot 14 cm/km.
- Nepoužitelné pro jiná území. Rychle roste zkreslení.



Zákony zkreslení

Snaha minimalizovat délkové zkreslení:

- kužel v normální poloze: pás široký $3^{\circ}20'$, 400 km, zkreslení 40 cm/km
- kužel v obecné poloze: užší pás $2^{\circ}30'$, 280 km, zkreslení 24 cm/km
- použití multiplikační konstanty $k=0,9999$: snížení délkového zkreslení na 14 cm/km u okraje pásu, -10 cm/km na rovnoběžce \mathring{s}_0 .

