Jednoduchá azimutální zobrazení, azimutální projekce

Matematická kartografie

Osnova

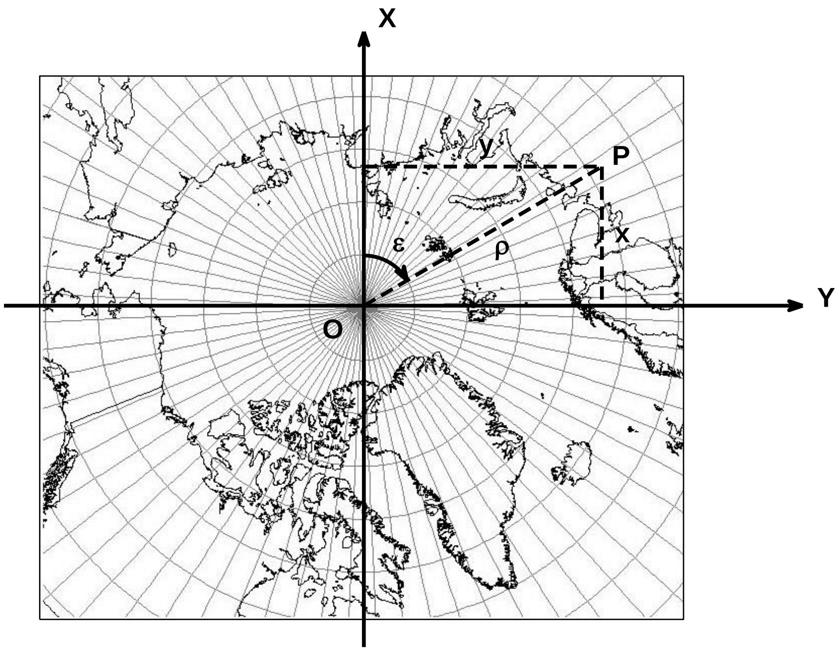
1. Základní vztahy a vzorce
2. Ekvidistantní zobrazení
3. Ekvivalentní zobrazení
4. Konformní zobrazení
5. Azimutální projekce

1

ZÁKLADNÍ VZTAHY A VZORCE

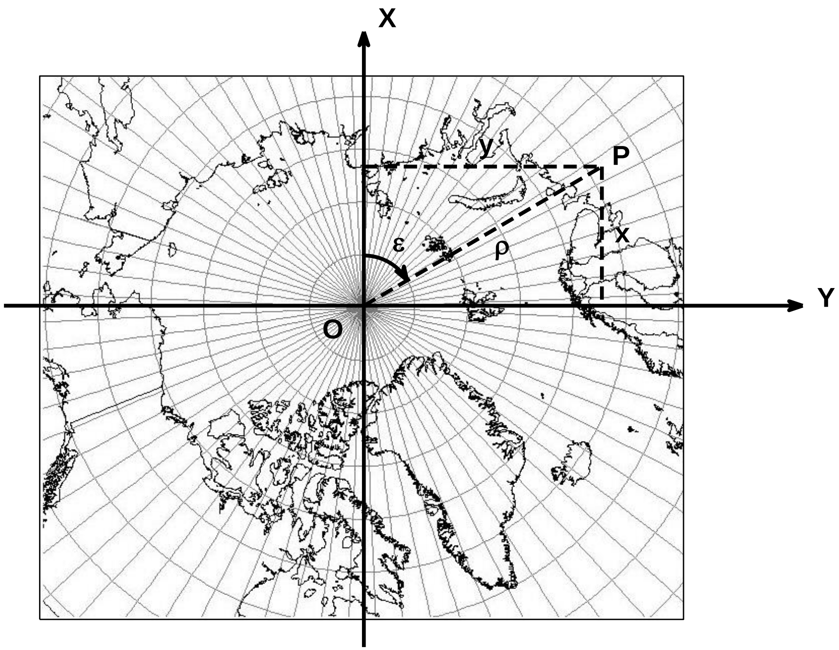
Základní vztahy a vzorce

- kuželová zobrazení: $\varepsilon = nV$
- azimutální zobrazení jsou mezní případ kuželových zobrazení, kdy konstanta n = 1
- počátek polární soustavy – vrchol kužele – splyne s pólem (zeměpisným nebo kartografickým)
- počátek rovinné pravoúhlé sítě – ztotožnění s obrazem pólu (středem zobrazení)
- osa x (svislá) se vloží do základního poledníku



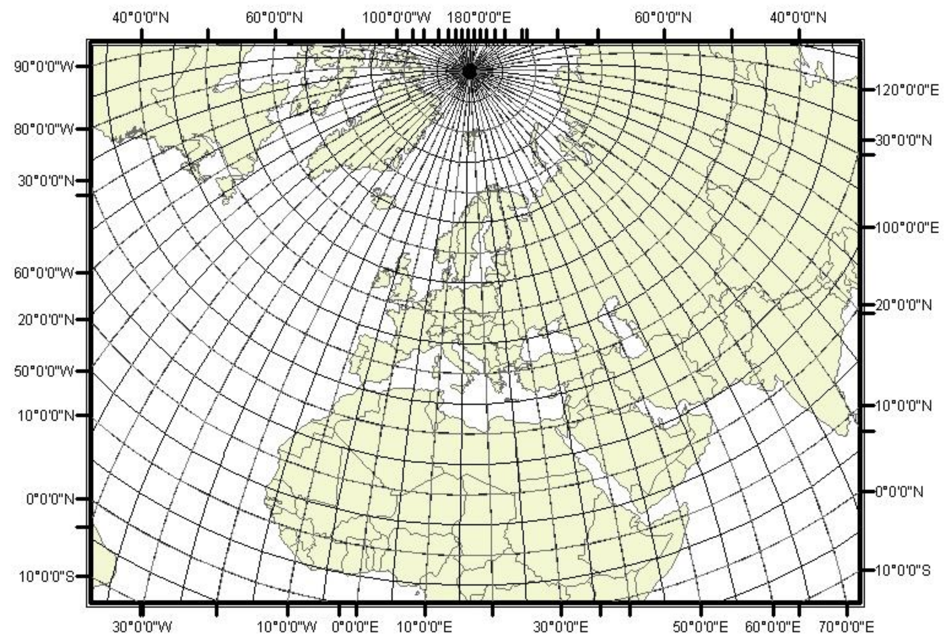
Základní vztahy a vzorce

- obrazem pólu je bod
- obrazem sítě poledníků jsou polopřímky z pólu
- obrazem rovnoběžek jsou soustředné kružnice se středem v pólu
- je to jednoduché zobrazení, poledníky a rovnoběžky jsou vzájemně kolmé
- ekvideformáty mají tvar soustředných kružnic se středem v pólu zobrazení



Základní vztahy a vzorce

- Odvozeno pro kouli, ale lze i pro elipsoid.
- Odvozeno pro pólovou polohu, ale používá se i šikmá nebo rovníková:
    - Obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složitými křivkami.
    - Pouze poledník procházející středem zobrazovaného území, který je totožný se základním kartografickým poledníkem (a tedy i s osou X), je zobrazen jako přímka.

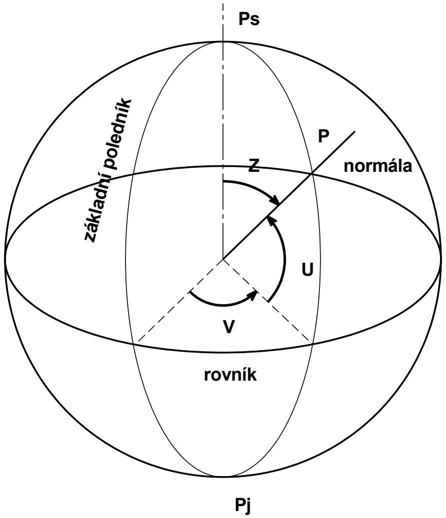


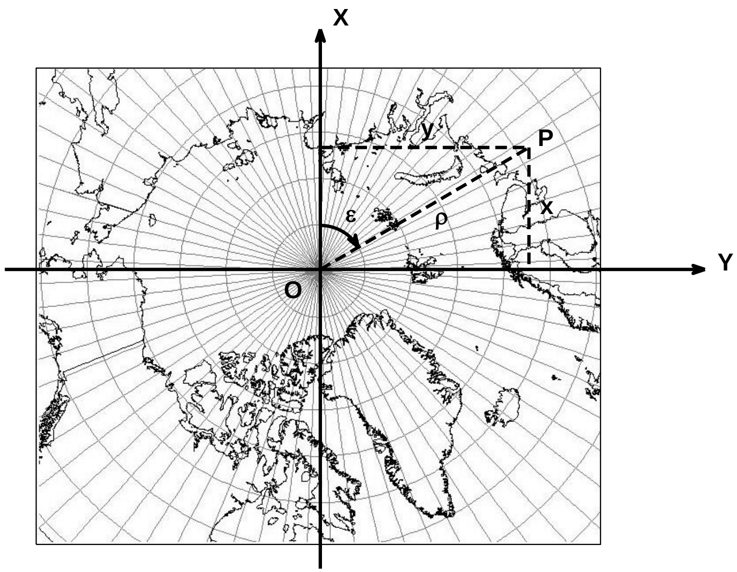
Základní vztahy a vzorce

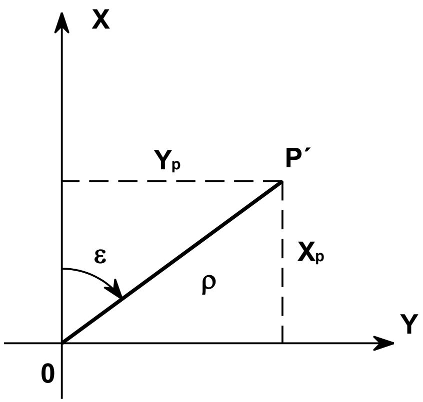
- zobrazovací rovnice v polárních souřadnicích
- použití zenitové vzdálenosti Z místo U

$$\rho = f(Z) \qquad Z = 90° - U$$

$$\varepsilon = V$$







přepočet do roviny:

$$x = \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

Základní vztahy a vzorce

Podobné jako u kuželového zobrazení, ale:

- bez konstanty n,
- se Z místo U,
- bez záporného znaménka – Z a ρ mají stejný směr.

rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{d\rho}{R dZ} \qquad m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \qquad m_{pl} = m_r m_p \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

2

EKVIDISTANTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvidistantní azimutální zobrazení

- asi nejběžnější ekvidistantní azimutální zobrazení – Postelovo
- ekvidistantní v polednících

$$m_p = \frac{d\rho}{R dZ} = 1$$ podmínka

$$\int_0^\rho d\rho = R \int_0^Z dZ$$

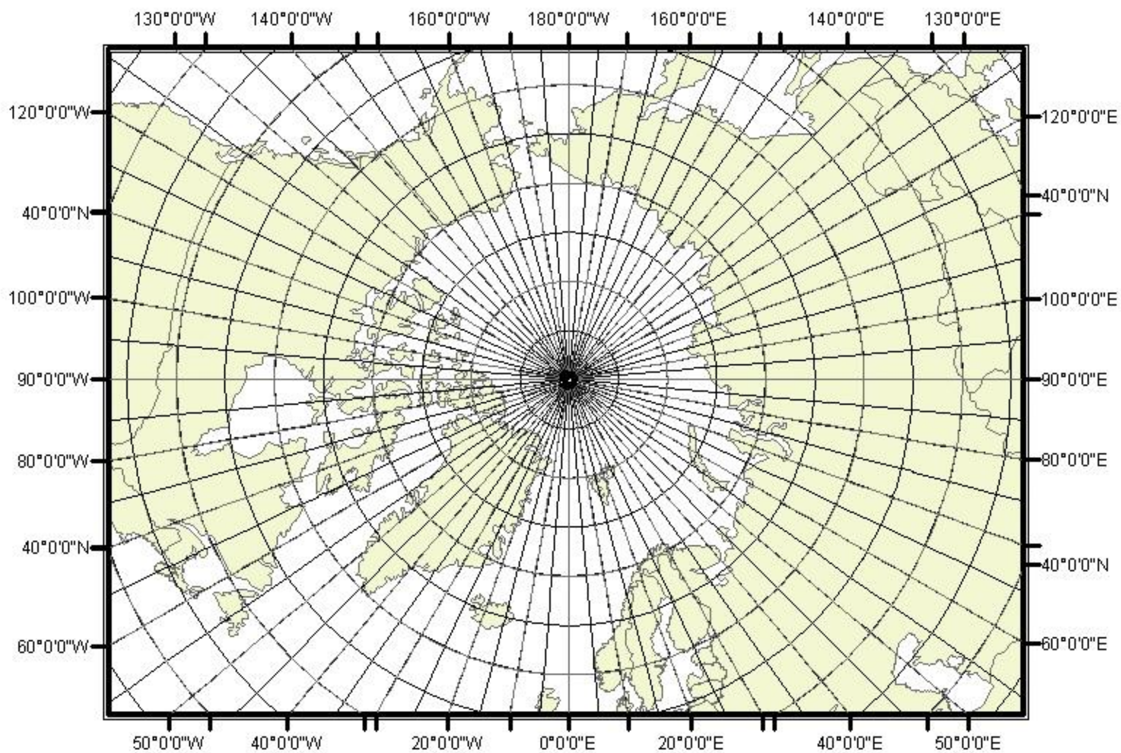
$$\rho = RZ$$ 1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$ 2. zobrazovací rovnice

$$m_p = 1$$

$$m_r = m_{pl} = \frac{Z}{\sin Z}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$



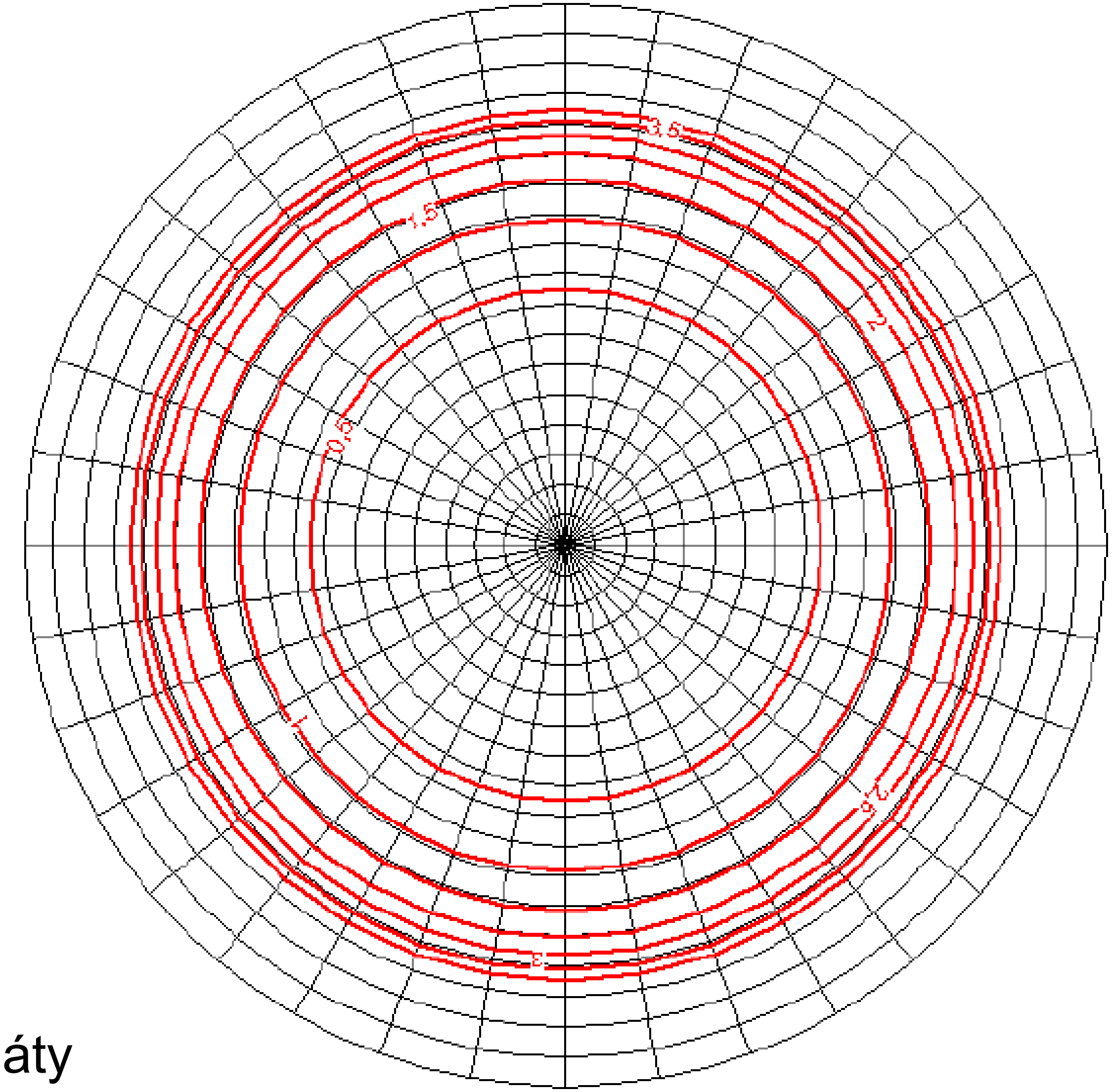
Kde se typicky používá?

Ekvidistantní azimutální zobrazení

- Zachovává vzdálenosti od pólu k libovolnému bodu v zobrazovaném prostoru
  - vzdálenosti obrazů rovnoběžek jsou stejné
  - zkreslení v polednících není (m_p=1)
- Vhodné pro rychlé zjišťování vzdáleností od pozorovacího místa - např. displeje radiolokátorů.

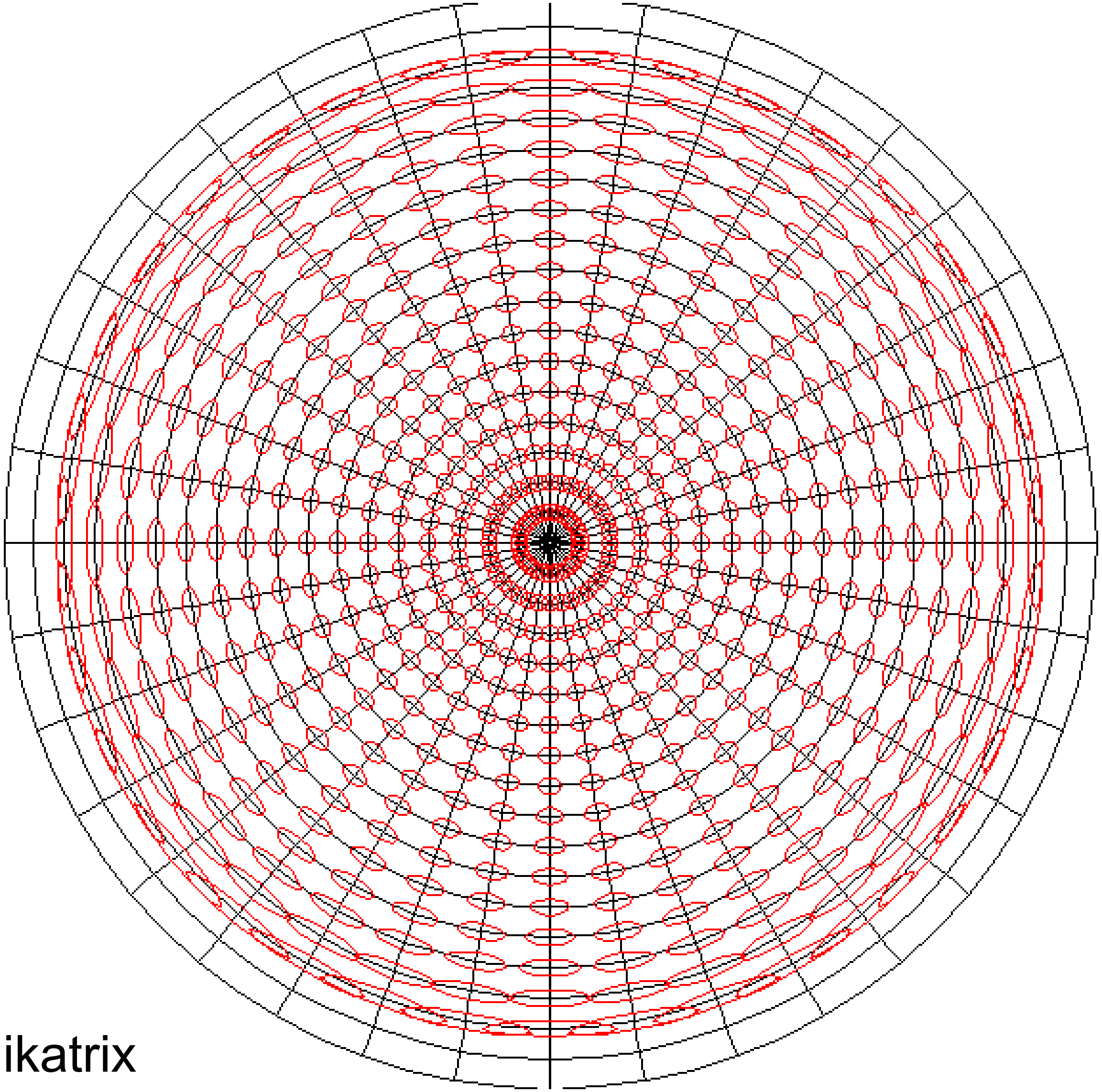
Jaké je zkreslení u pólu? A jaké na 60° rovnoběžce?

Ekvidistantní azimutální zobrazení



ekvideformáty

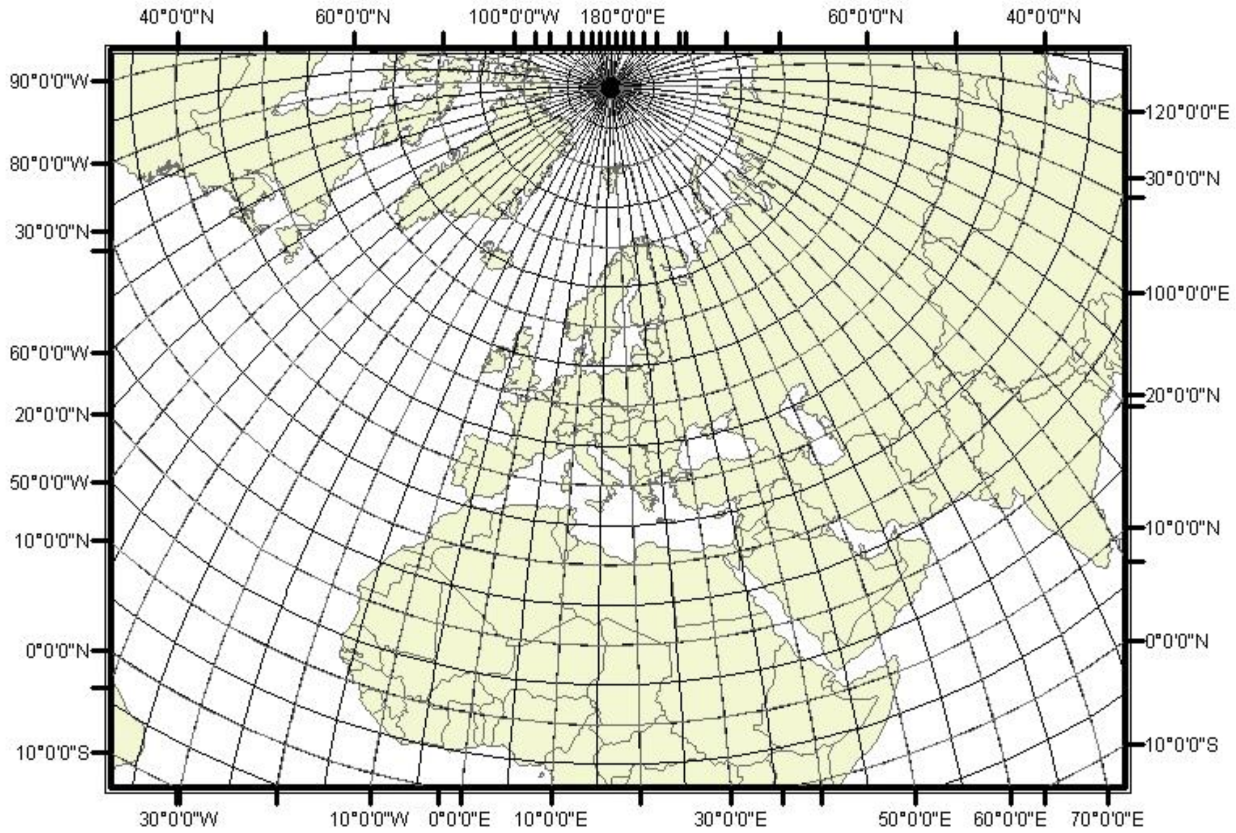
Ekvidistantní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix

Ekvidistantní azimutální zobrazení

Šikmá poloha zobrazení - obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složité křivky.



Ukázka - kartografický pól v Brně (U_k = 49°12´, V_k =16°36´).

Ekvidistantní azimutální zobrazení

varianta zobrazení:

- doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0
- doplní se parametr c (redukční konstanta)

$$m_{r_0} c = 1 \xrightarrow{\text{dosazení}} m_{r_0} = \frac{Z_0}{\sin Z_0} \qquad c = \frac{\sin Z_0}{Z_0}$$

$\rho = cRZ$ 1. zobrazovací rovnice

$\varepsilon = V$ 2. zobrazovací rovnice

rovnice zkreslení:

$$m_p = c \qquad m_r = \frac{cZ}{\sin Z} \qquad m_{pl} = \frac{c^2 Z}{\sin Z} \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$

c je konstanta, zkreslení v polednících není nulové, ale konstantní

3

EKVIVALENTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Ekvivalentní azimutální zobrazení – též Lambertovo.
- Lambert Azimuthal Equal Area (zkratka LAEA).
- Využíváno v rámci Evropského souřadnicové sítě Grid_ERTS_89-LAEA.
- Nezkresluje vzájemnou velikost kontinentů – používáno při zobrazování velkých územních celků na jedné mapě – např. hemisféry.
- Kartografický pól může být umístěn kdekoliv – např. na rovníku.
- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.

$$m_p m_r = 1$$

podmínka

$$\frac{d\rho}{R dZ} \frac{\rho}{R \sin Z} = 1$$

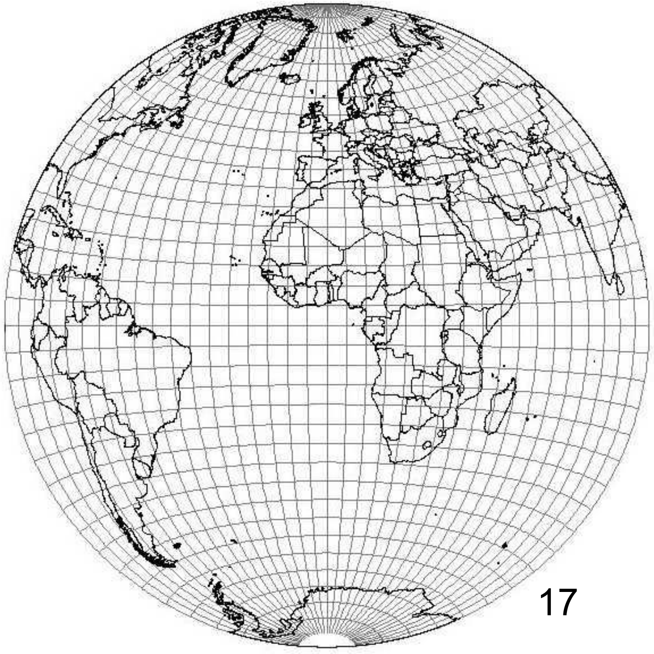
$$\int_0^{\rho} \rho d\rho = R^2 \int_0^{Z} \sin Z dZ$$

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$$

1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$

2. zobrazovací rovnice



Ekvivalentní azimutální zobrazení

rovnice zkreslení

zobrazovací rovnice

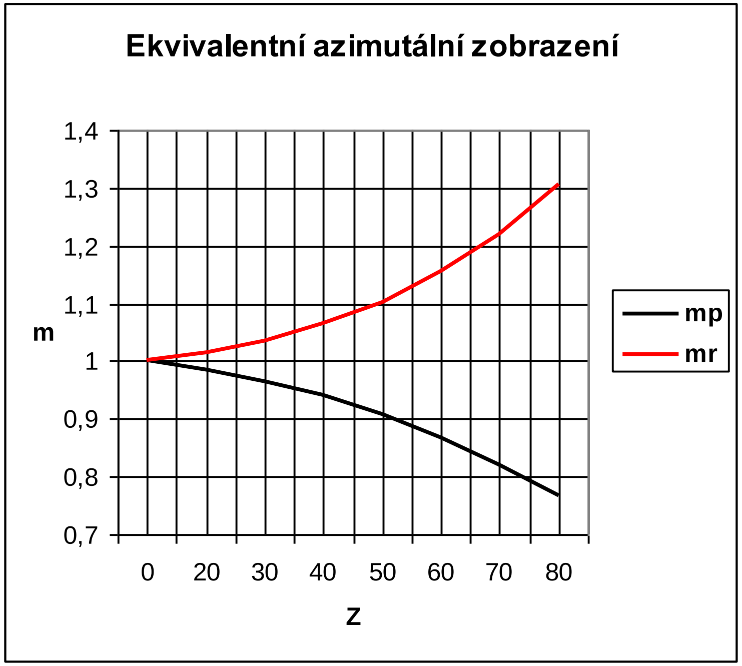
$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \leftarrow \rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{2R \sin \frac{Z}{2}}{R \sin Z}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{1}{\cos \frac{Z}{2}}$$

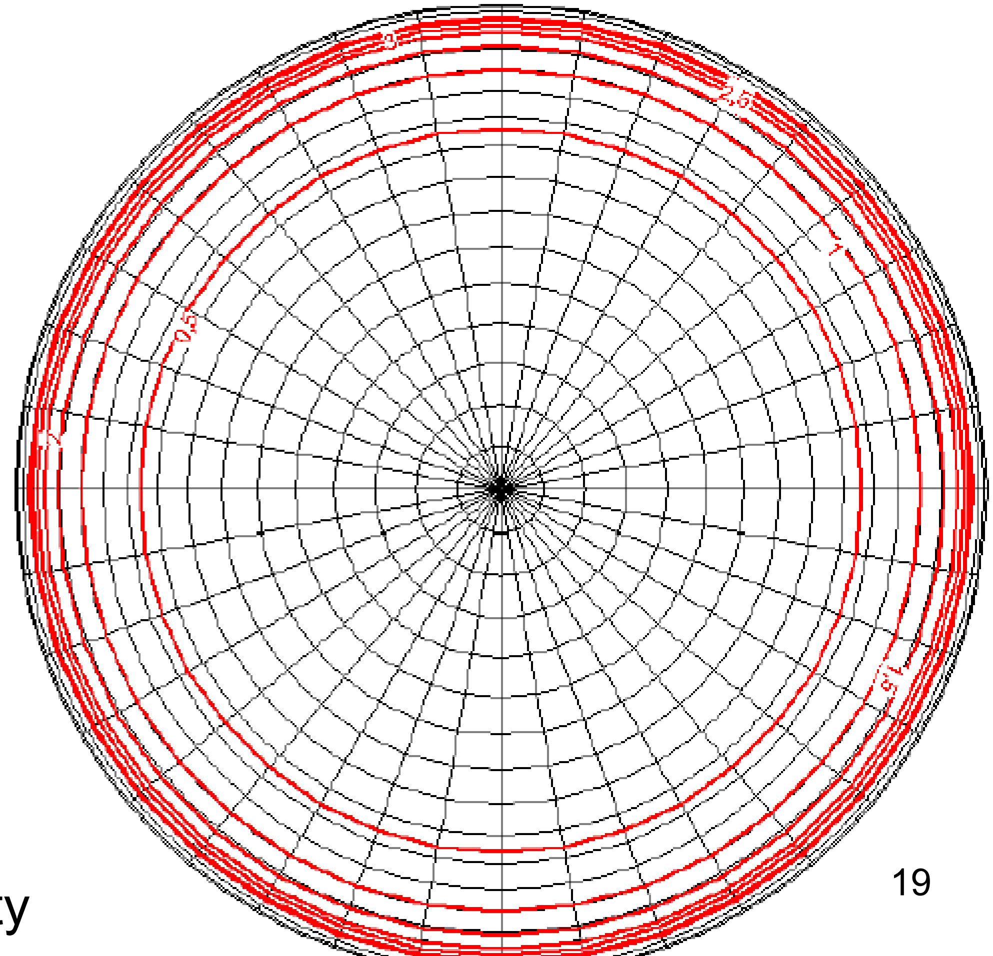
$$m_{pl} = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{Z}{2}}{1 + \cos^2 \frac{Z}{2}}$$



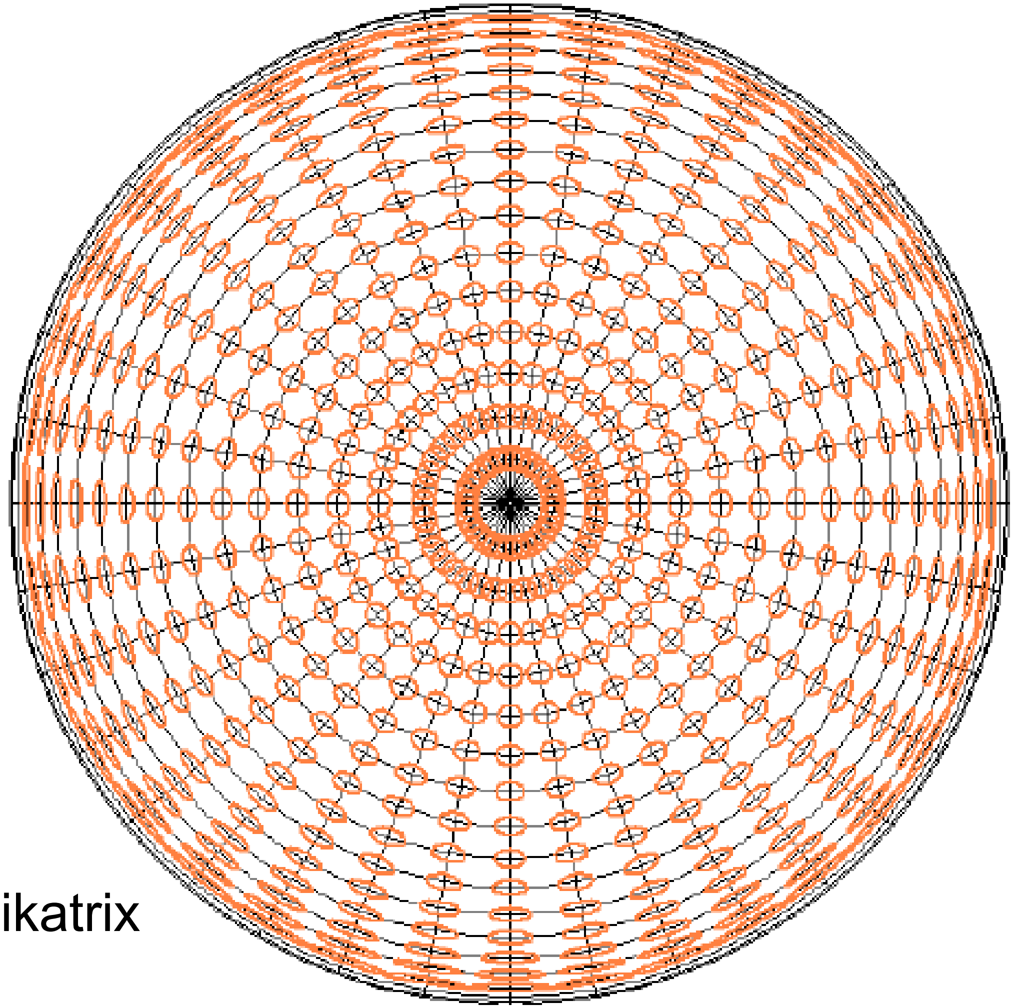
Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.
- Neplatí tedy, že u jednoduchých ekvivalentních zobrazení se šířka poledníkového pásu zkracuje vždy směrem k pólům nebo vždy směrem od pólů!
- Vždy od středu mapy nebo od osové přímky.



ekvideformáty

Ekvivalentní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix

4

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ

Konformní azimutální zobrazení

$m_p = m_r$ podmínka

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\rho}{R\sin Z}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{dZ}{\sin Z}$$ neurčitý integrál – protože Z a ρ může nabývat i hodnotu 0

$$\ln \rho = \ln tg\frac{Z}{2} + \ln c$$ závislé na parametru c (integrační konstanta) – musíme ho určit

$$\rho = c\,tg\frac{Z}{2}$$ 1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$ 2. zobrazovací rovnice

rovnice zkreslení: $m = \dfrac{c}{2R\cos^2\dfrac{Z}{2}}$ $m_{pl} = m^2$ $\Delta\omega = 0$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c.

A) doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0

$$m_{r_0} = 1 \qquad \frac{\rho_0}{R \sin Z_0} = 1 \xrightarrow[\rho = c\,tg \frac{Z}{2}]{\text{dosazení zobrazovací rovnice}} c = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2}$$

dosazení c

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2} tg \frac{Z}{2} \qquad \varepsilon = V$$

rovnice zkreslení:

$$m = \frac{\cos^2 \frac{Z_0}{2}}{\cos^2 \frac{Z}{2}} \qquad m_{pl} = m^2 \qquad \Delta\omega = 0$$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c.

B) doplňkový požadavek na nezkreslený pól Z_0=0° (střed mapy)

Tzv. stereografická projekce – ukázka viz dále.

$$m_{r_0} = 1 \qquad c = 2R$$

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2Rtg\frac{Z}{2} \qquad \varepsilon = V$$

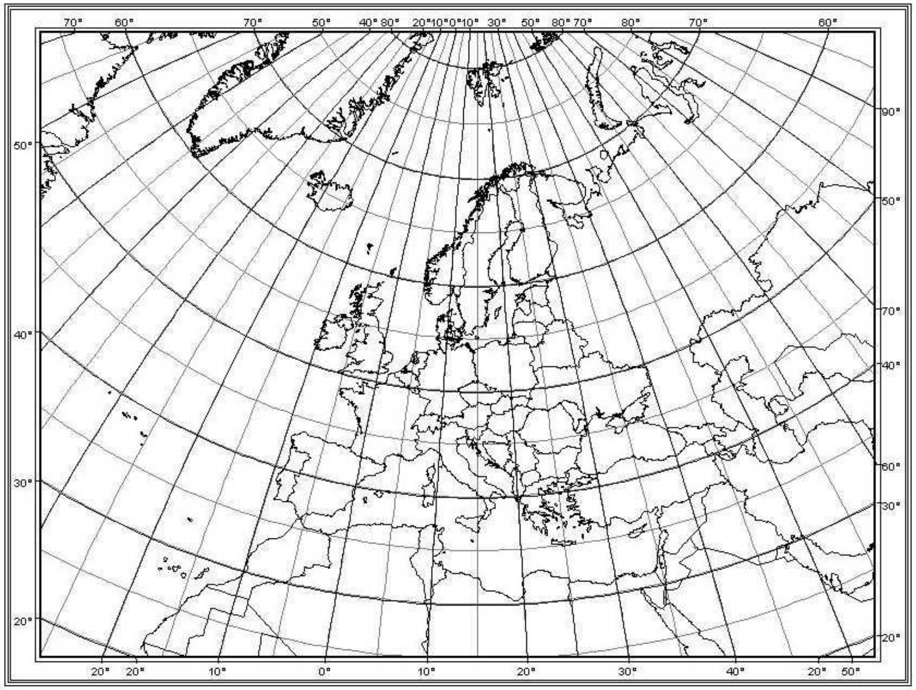
rovnice zkreslení:

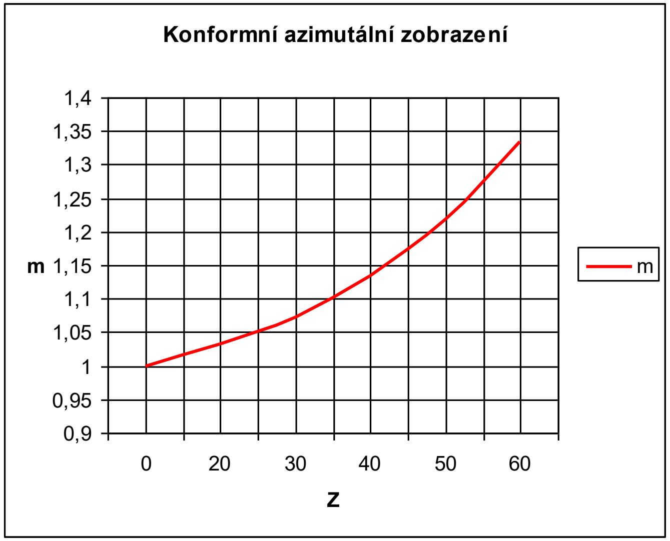
$$m = \frac{1}{\cos^2\frac{Z}{2}} \qquad m_{pl} = m^2 \qquad \Delta\omega = 0$$

Někdy se nastavuje hodnota délkového zkreslení na pólu (měřítkový faktor). Např. při definování zobrazení UPS (Universal Polar Stereographic).

Konformní azimutální zobrazení

Konformní azimutální zobrazení – šikmá poloha
pól = U_0=50°, V_0=15°

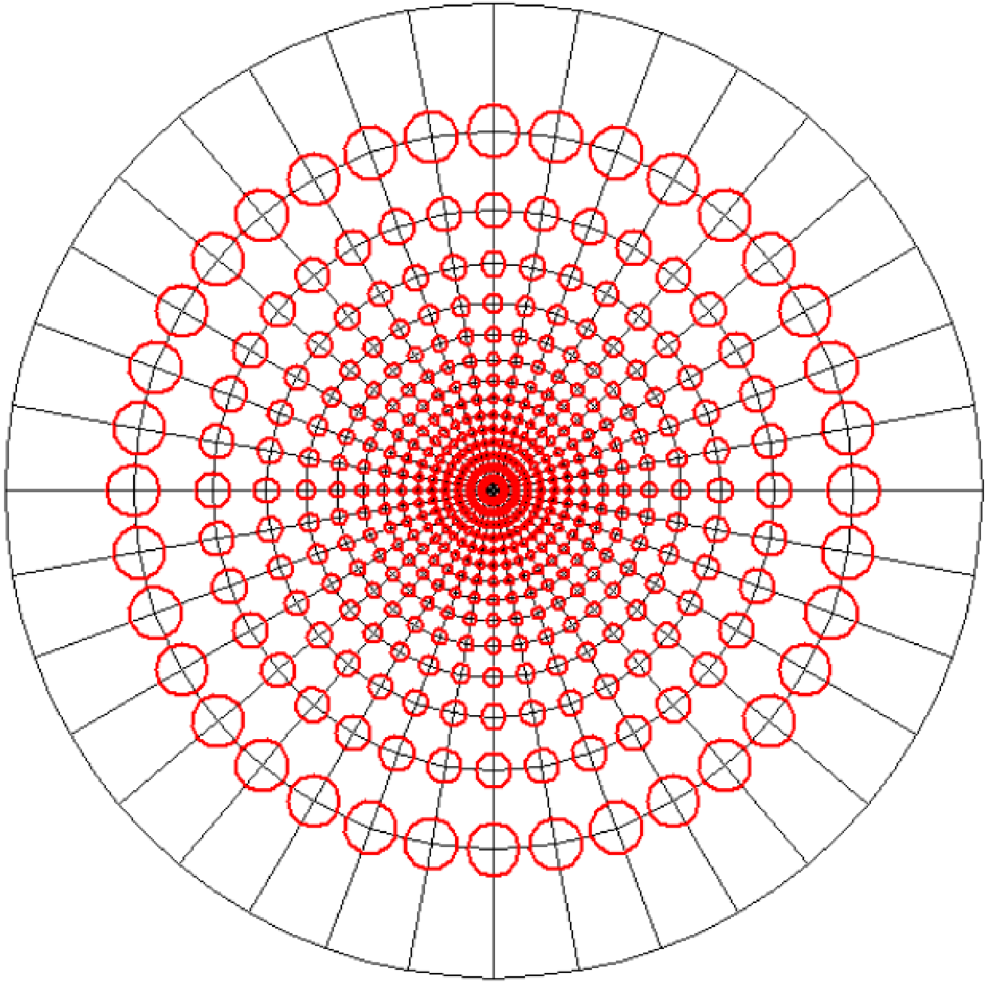




Co je nezkreslené?

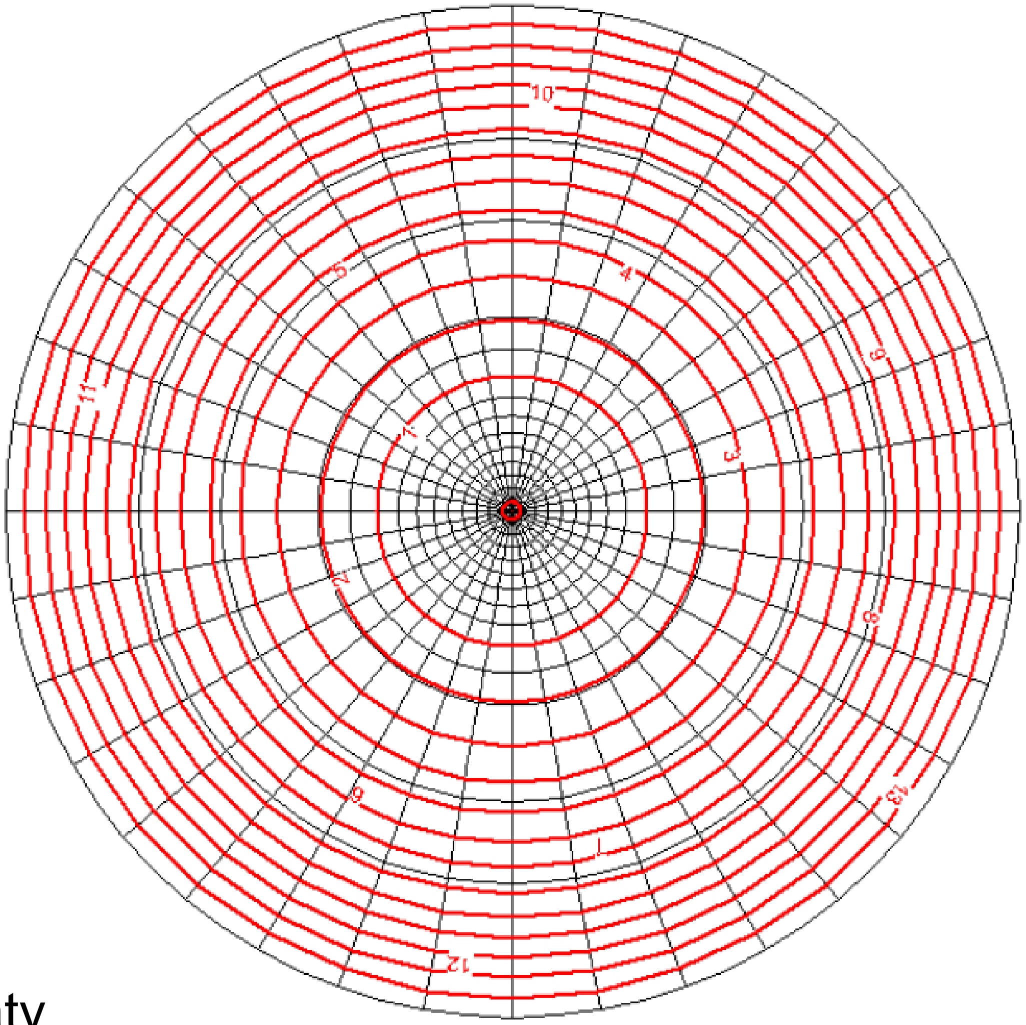
Konformní azimutální zobrazení

Zvětšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.



Tissotovy indikatrix

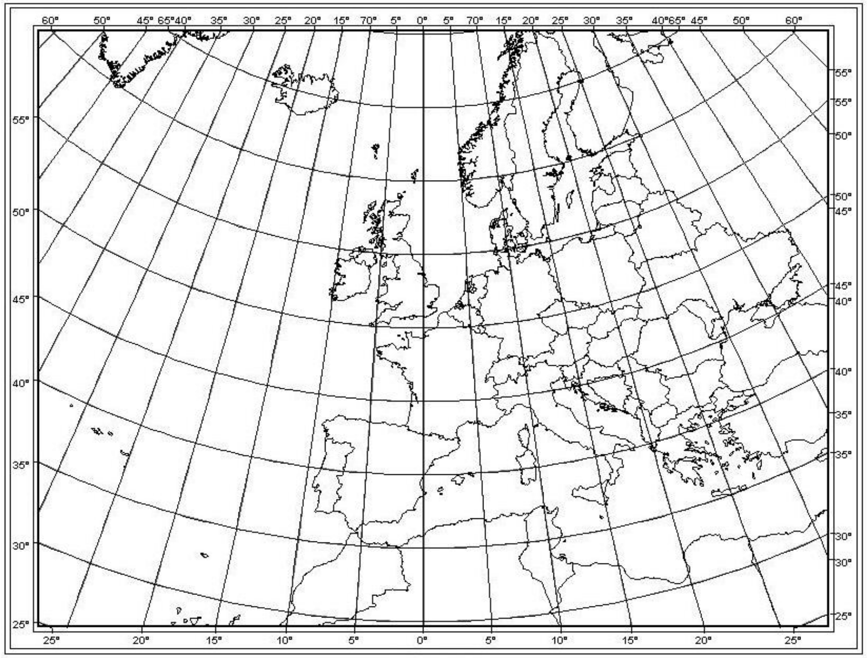
Konformní azimutální zobrazení

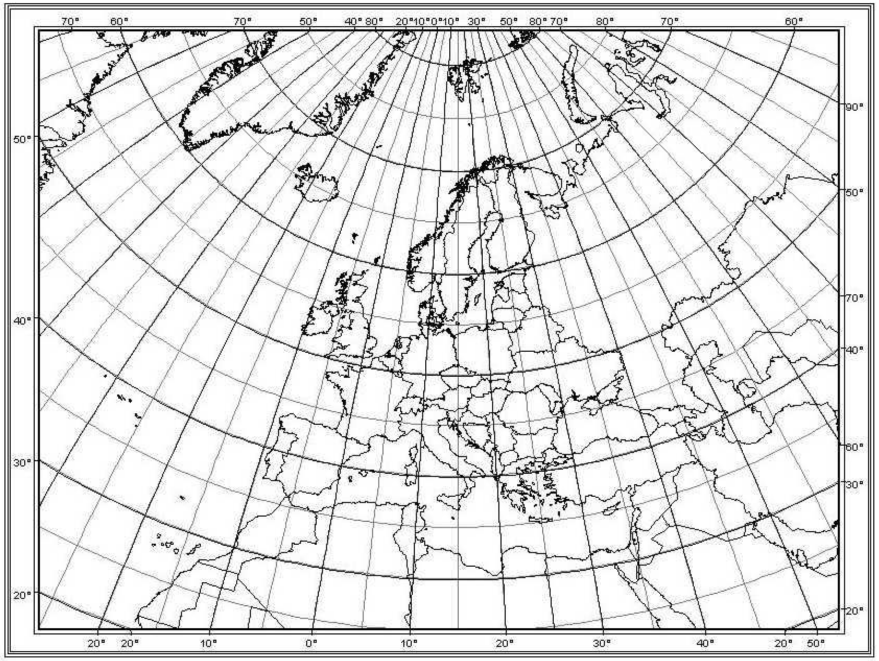


ekvideformáty

Konformní azimutální zobrazení

Jak odlišit kuželové v pólové poloze a azimutální v obecné poloze?





Nápověda: Poledníky.

5

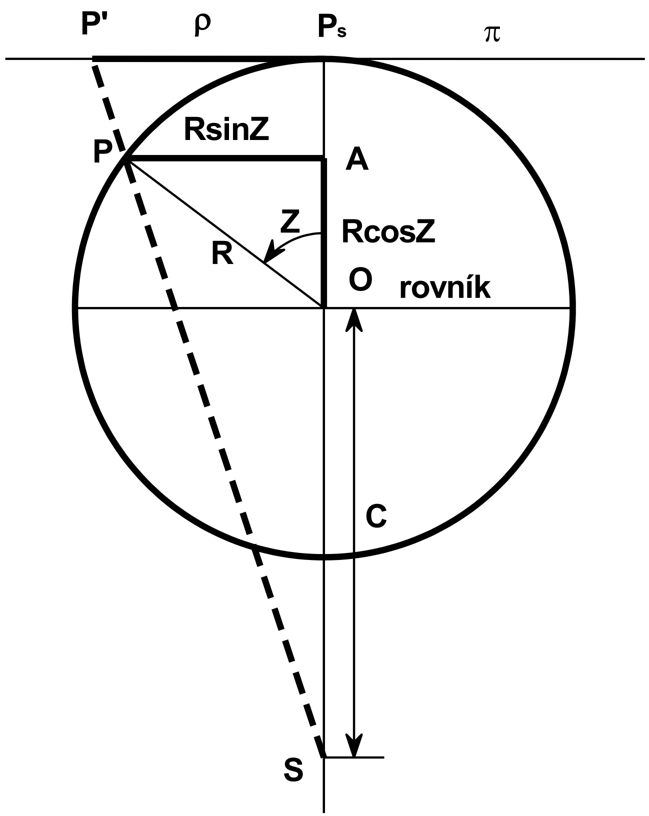
AZIMUTÁLNÍ PROJEKCE

Azimutální projekce – princip

- „Projections“ = kartografická zobrazení
- „Projekce“ = odvoditelné geometrickou cestou

- Projekce – odvozování rovinných souřadnic na základě geometrických principů.
- Projekce povrchu referenční koule na zobrazovací rovinu.
- Existují i válcové a kuželové projekce. Ale používají se méně.

Azimutální projekce – princip



podobné trojúhelníky:

$$\frac{\rho}{R\sin Z} = \frac{C+R}{C+R\cos Z}$$

$$\rho = \frac{(C+R)R\sin Z}{C+R\cos Z}$$

1. zobrazovací rovnice

C – odlišuje různé verze projekcí

$$\varepsilon = V$$

2. zobrazovací rovnice

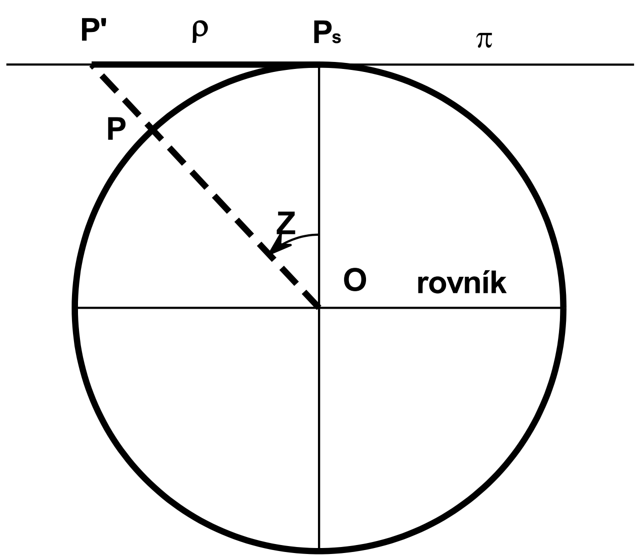
Obecné zákony zkreslení jako u jiných azimutálních zobrazení.

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ} \qquad m_r = \frac{\rho}{R\sin Z} \qquad m_{pl} = m_r m_p \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

Gnómonická projekce

Gnómonická (centrální) projekce vzniká při promítání ze středu koule.

- C = 0
- lze zobrazit jen jednu polokouli
- nejde zobrazit rovník
- ortodromy se zobrazují jako přímky
- Thales z Milétu



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = R tg Z$$

$$\varepsilon = V$$

dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{1}{\cos^2 Z} \qquad m_r = \frac{1}{\cos Z}$$

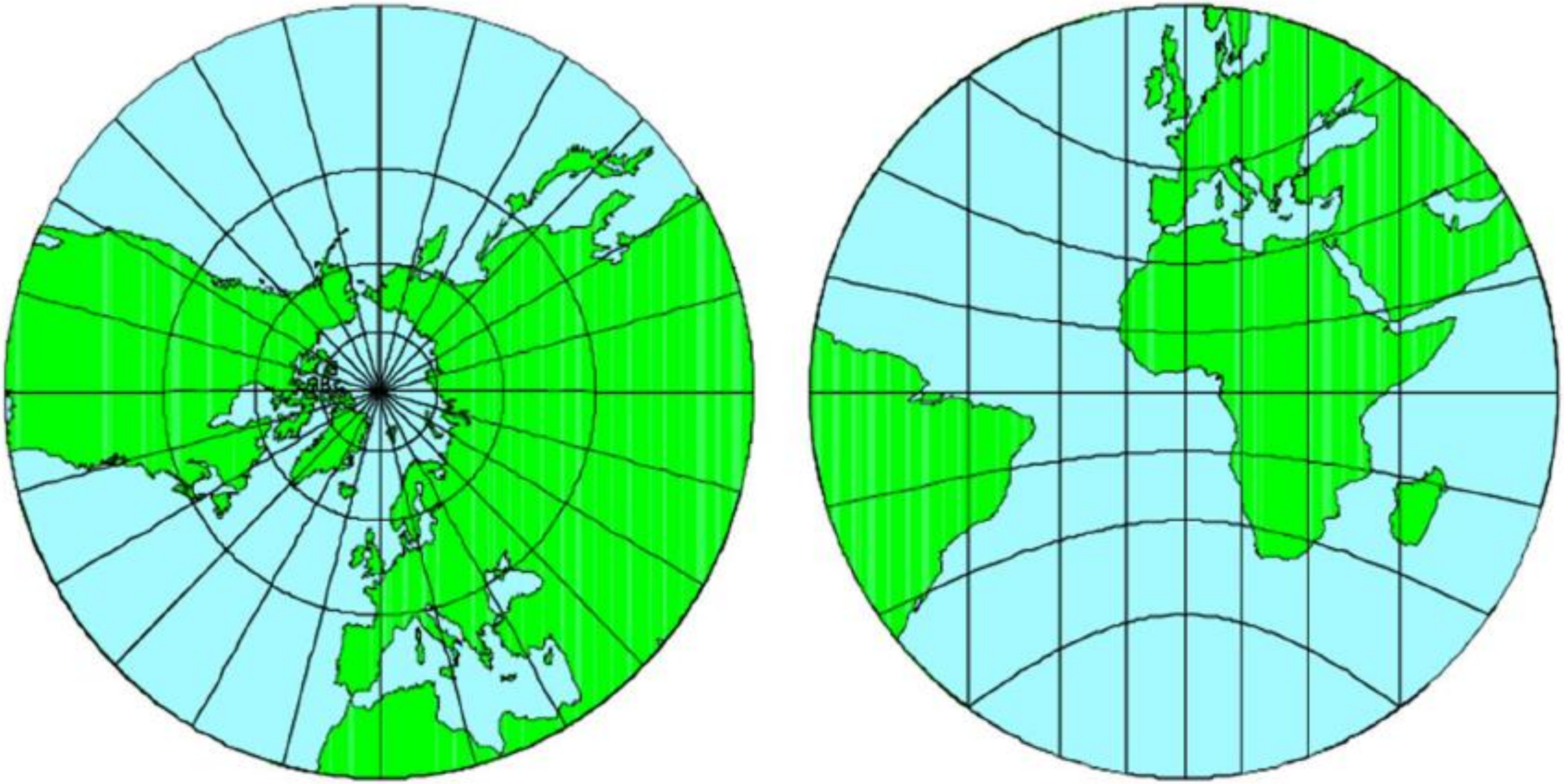
$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^3 Z}$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\cos Z - 1}{\cos Z + 1} \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = tg^2\frac{Z}{2}$$

Všimli jste si na vzorcích zkreslení něčeho?

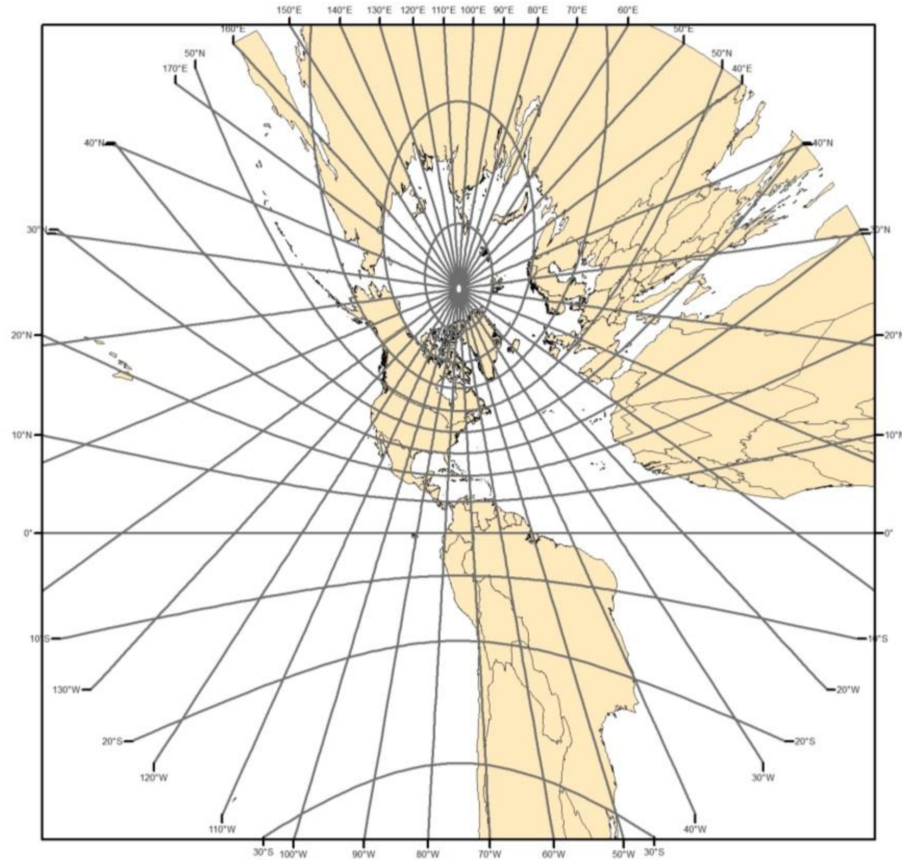
Není délkojevné, úhlojevné ani plochojevné.

Gnómonická projekce



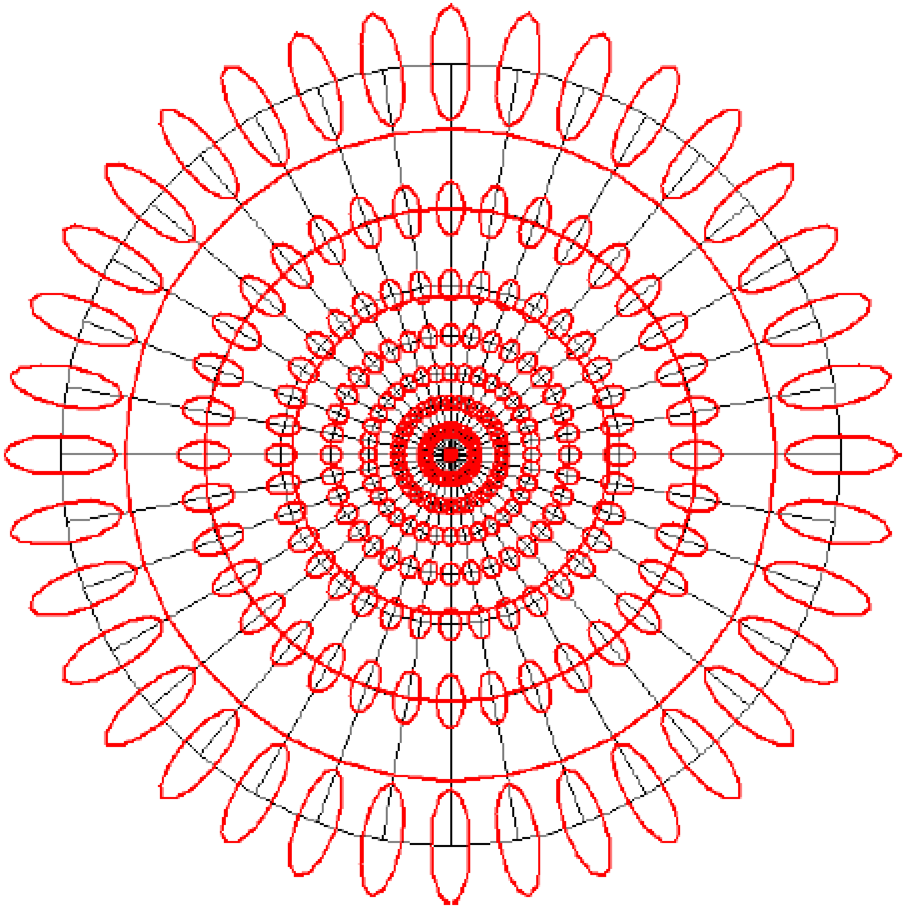
- Ve skutečnosti jde zobrazit i rovník – při správně nastavené polokouli.
- pólová poloha – rovnoběžky soustředné kružnice, poledníky polopřímky
- rovníková poloha – poledníky jsou rovnoběžné úsečky, rovnoběžky jsou hyperboly se středem na rovníku.

Gnómonická projekce



obecná poloha – poledníky úsečky, rovnoběžky hyperboly, elipsy, paraboly

Gnómonická projekce

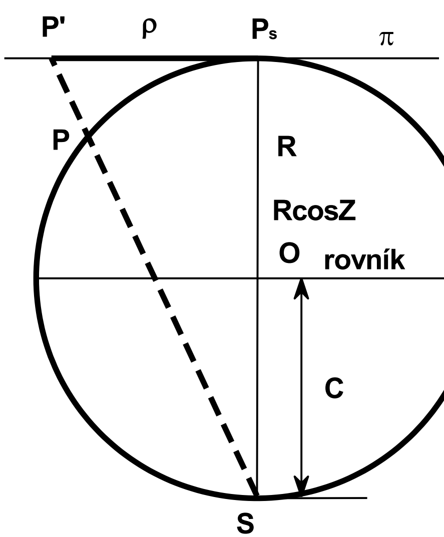


Tissotovy indikatrix <20°,90°>

Stereografická projekce

Stereografická projekce vzniká při promítání z protějšího pólu koule.

- C = R
- projekce je konformním azimutálním zobrazením – viz dříve
- vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zvětšují směrem od středu mapy
- Hipparchos z Nikaie



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = \frac{2R\sin Z}{1+\cos Z} = 2Rtg\frac{Z}{2}$$

$$\varepsilon = V$$

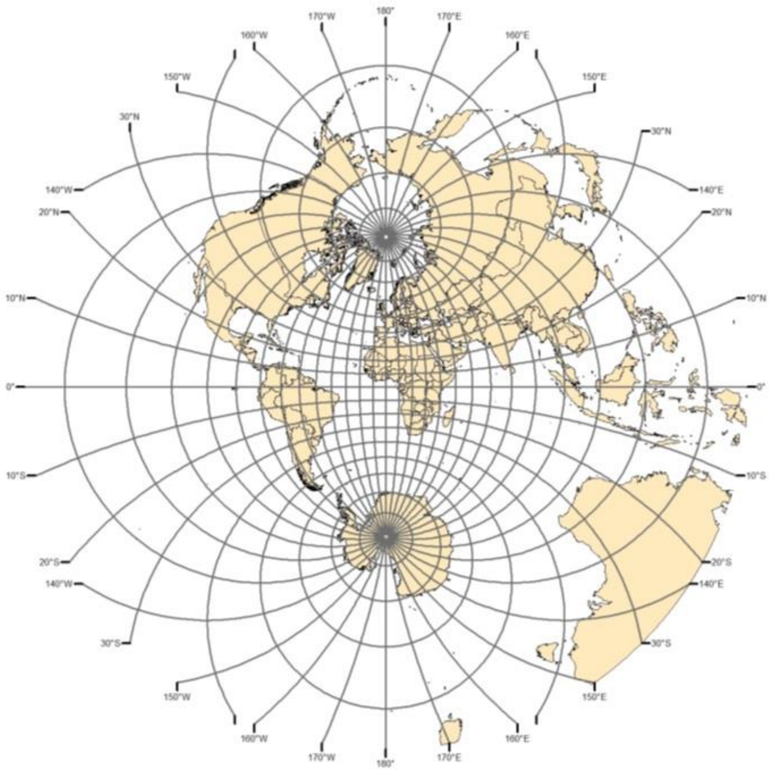
dosazení ρ do rovnice zkreslení:

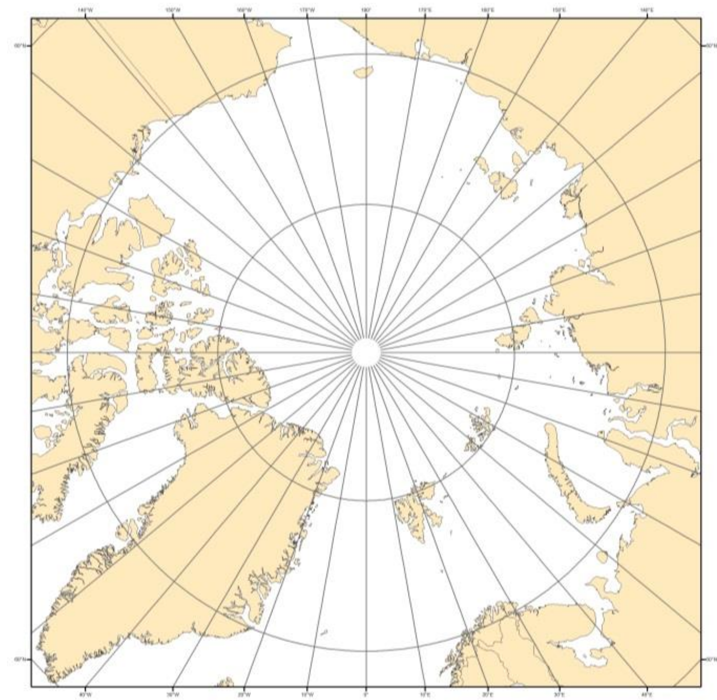
$$m_p = m_r = \frac{2}{1+\cos Z} = \frac{1}{\cos^2\frac{Z}{2}}$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^4\frac{Z}{2}}$$

$$\Delta\omega = 0$$

Stereografická projekce





Odkud se promítalo?

Ortografická projekce

Ortografická projekce vzniká při promítání z nekonečna.

- C = nekonečno
- „pohled z vesmíru“
- projekce je ekvidistantním zobrazením v rovnoběžkách

odvodí se z obrázku (nekonečno do vzorce nedosadíme):

$$\rho = R \sin Z$$

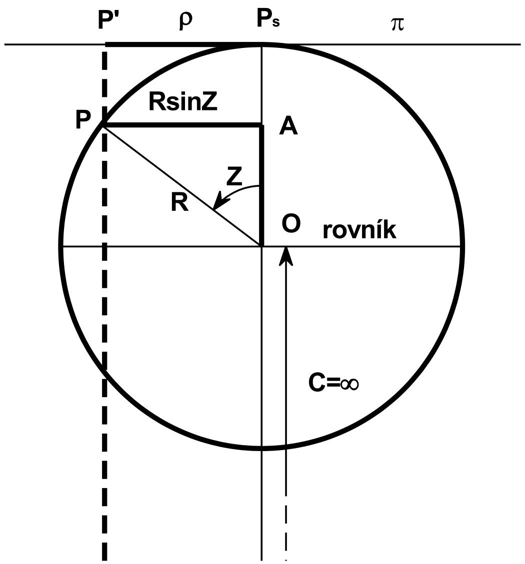
$$\varepsilon = V$$

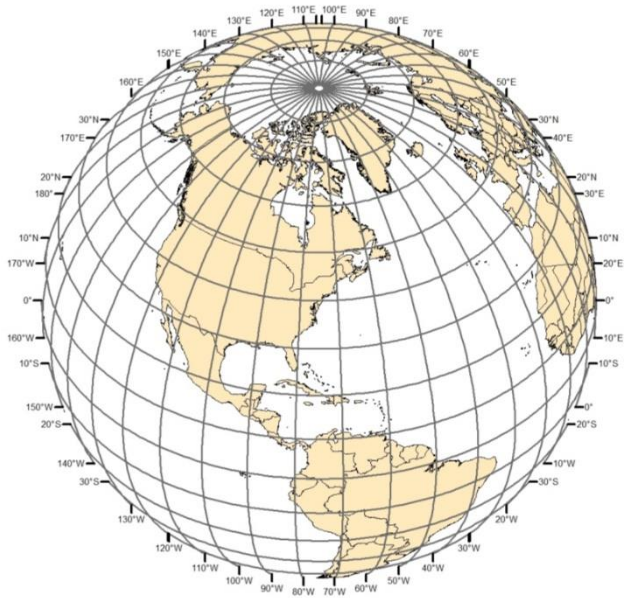
dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = m_{pl} = \cos Z$$

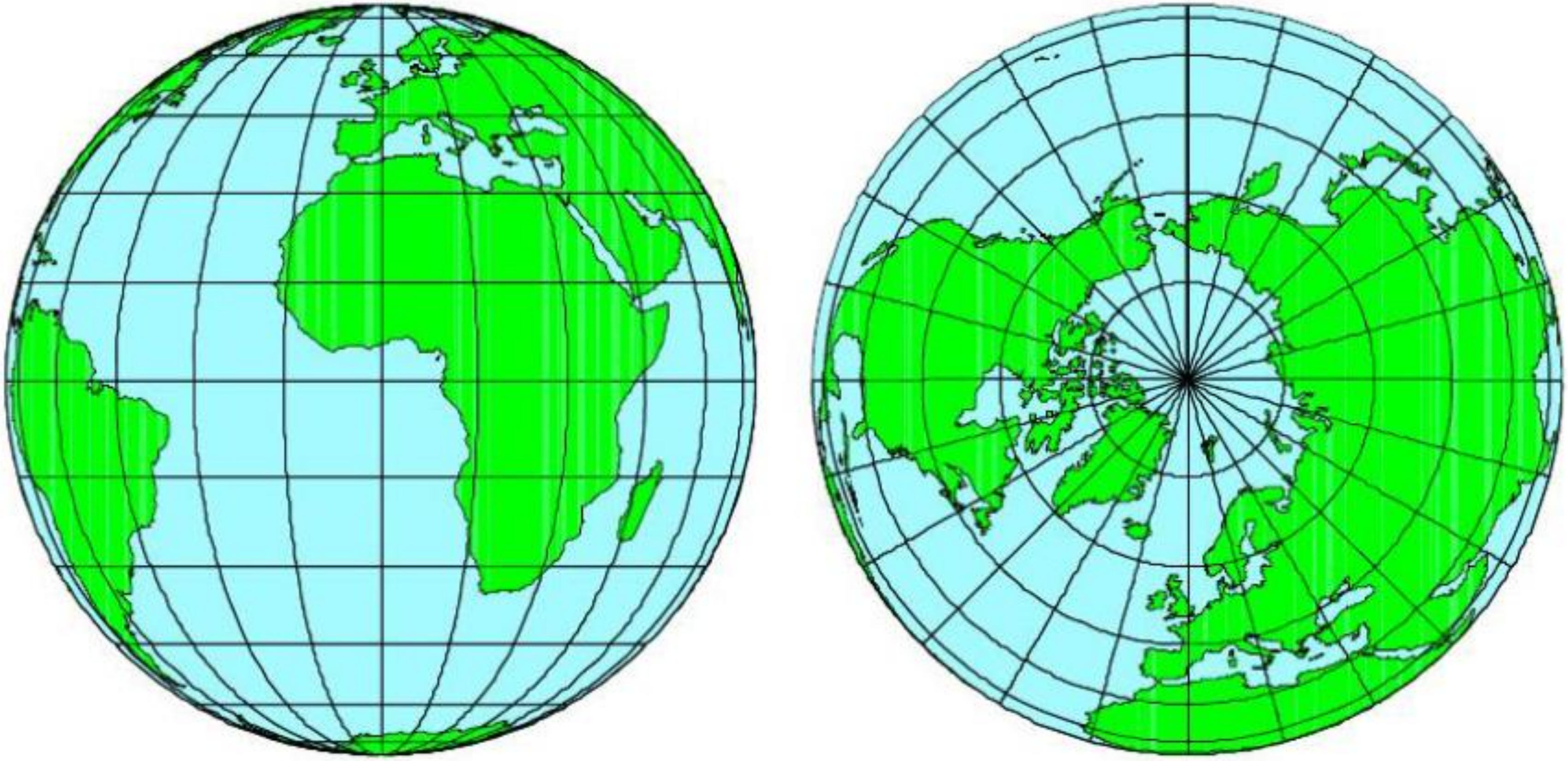
$$m_r = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = tg^2 \frac{Z}{2}$$



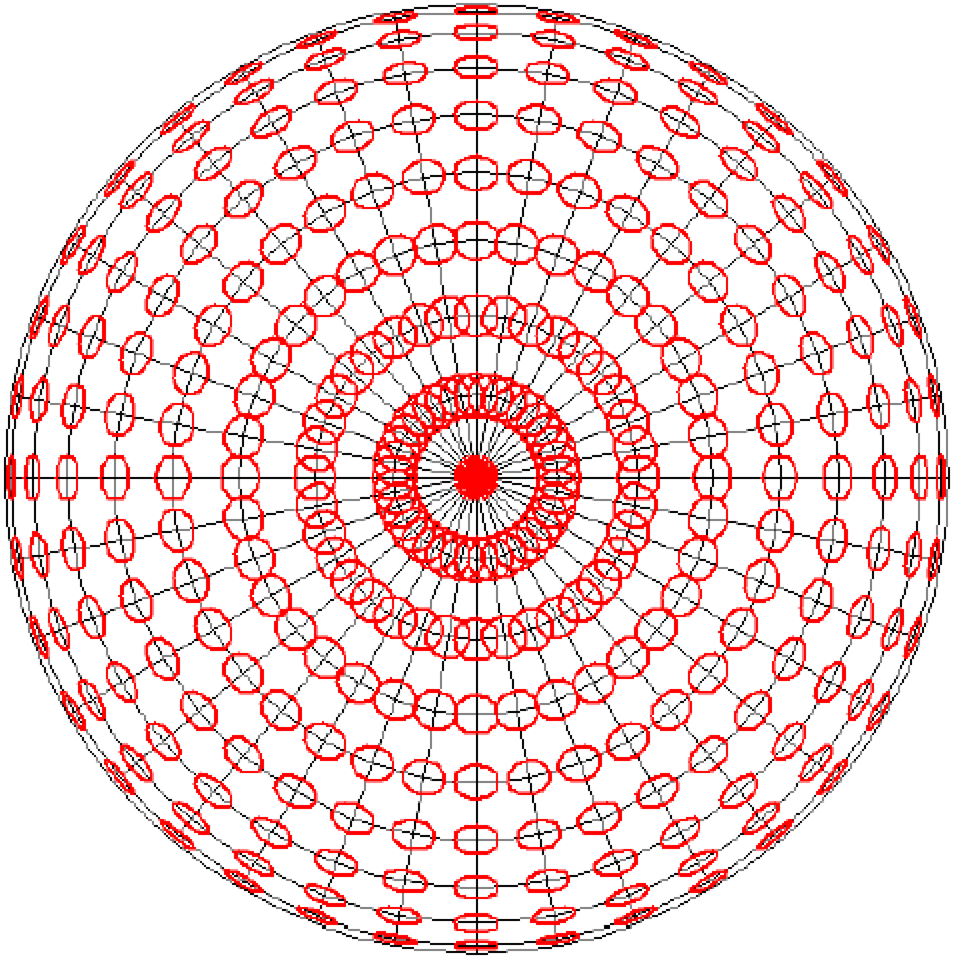


Ortografická projekce



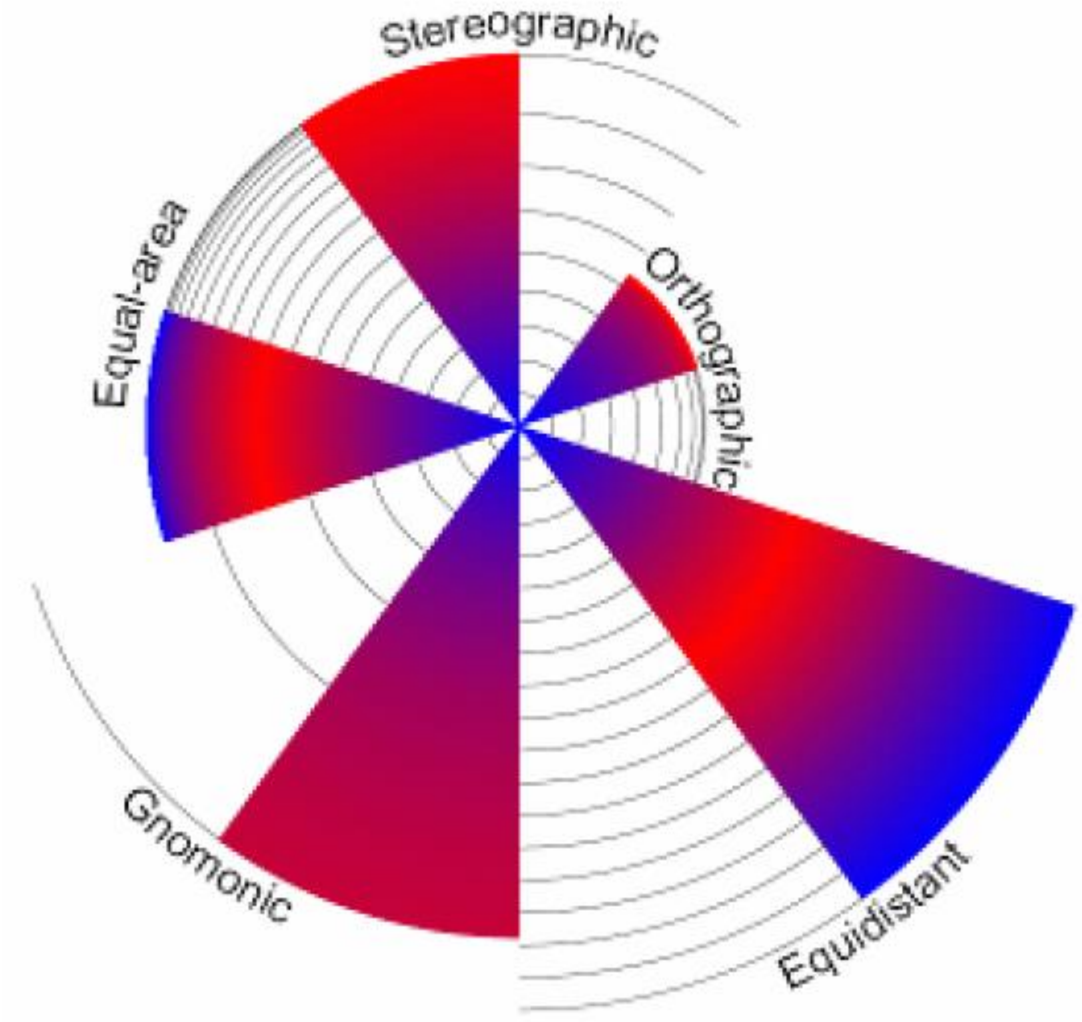
- Rovníková poloha: rovnoběžky úsečky, poledníky elipsy.
- Pólová poloha: rovnoběžky kružnice, poledníky polopřímky.
- Obecná poloha: poledníky i rovnoběžky elipsy.

Ortografická projekce



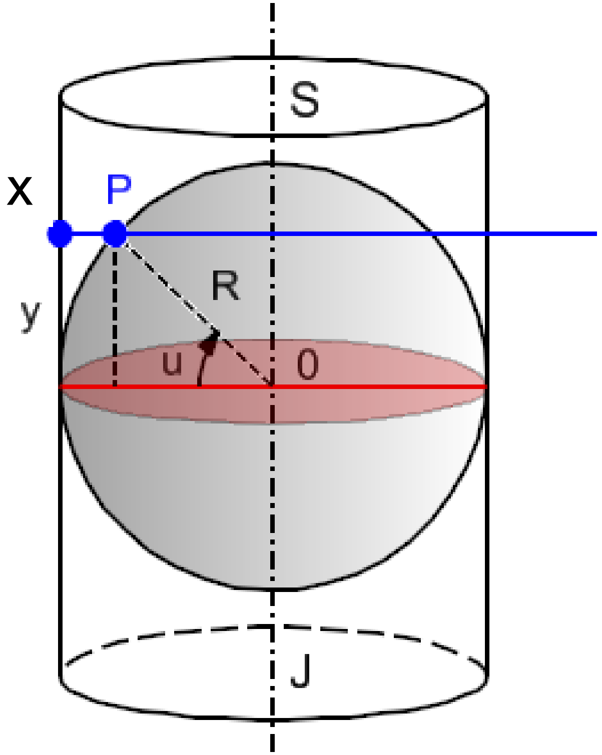
Tissotovy indikatrix

Srovnání různých azimutálních zobrazení



Ortografická projekce na válec

- Pozor! Ne všechny projekce jsou azimutální.
- Zobrazení Lambertovo válcové plochojevné. Viz válcová zobrazení.
- Ortografická válcová projekce. Střed promítání v nekonečnu.
- Ekvivalentní
- Nezkreslený rovník



$$x = R \sin u$$
$$y = Rv$$