ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

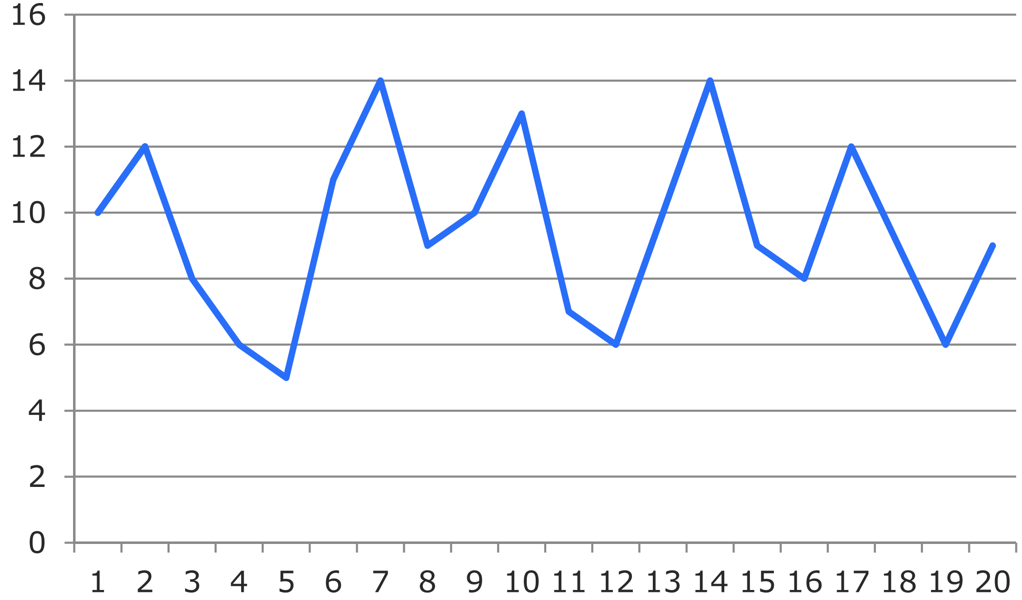
UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

III. ČASOVÉ ŘADY

PŘÍKLAD TAK TROCHU NA VYSVĚTLENOU

ZADÁNÍ

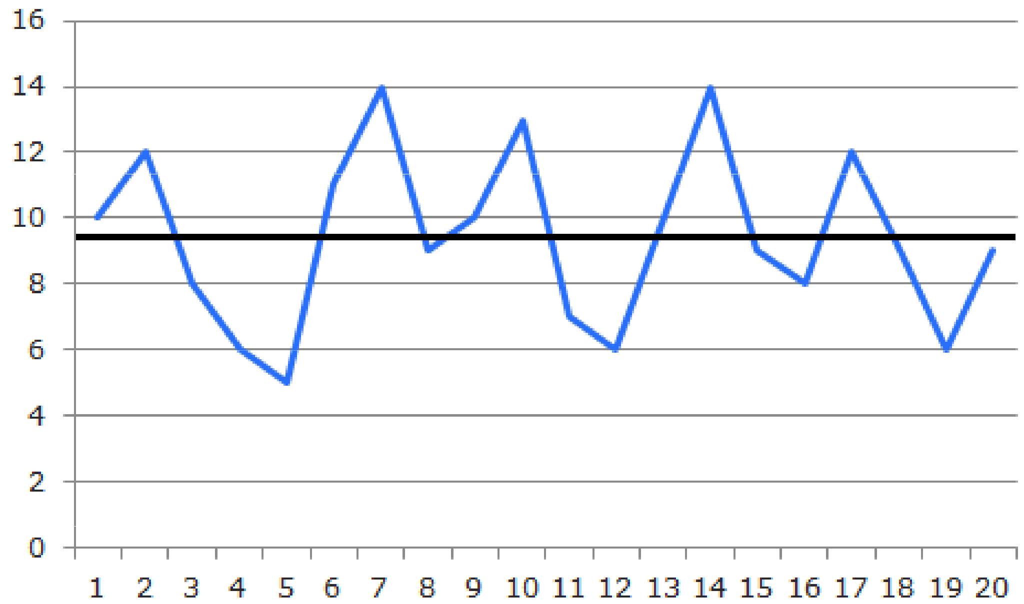
10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9



ZADÁNÍ

- ☑ průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$



ZADÁNÍ

- průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}\cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$

- klouzavý průměr:

pro m liché

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=k-(m-1)\mathrm{div}2}^{k+(m-1)\mathrm{div}2} x(i) = \sum_{i=k-(m-1)\mathrm{div}2}^{k+(m-1)\mathrm{div}2} \frac{1}{m}\cdot x(i) = \sum_{i=k-(m-1)\mathrm{div}2}^{k+(m-1)\mathrm{div}2} a_m \cdot x(i)$$

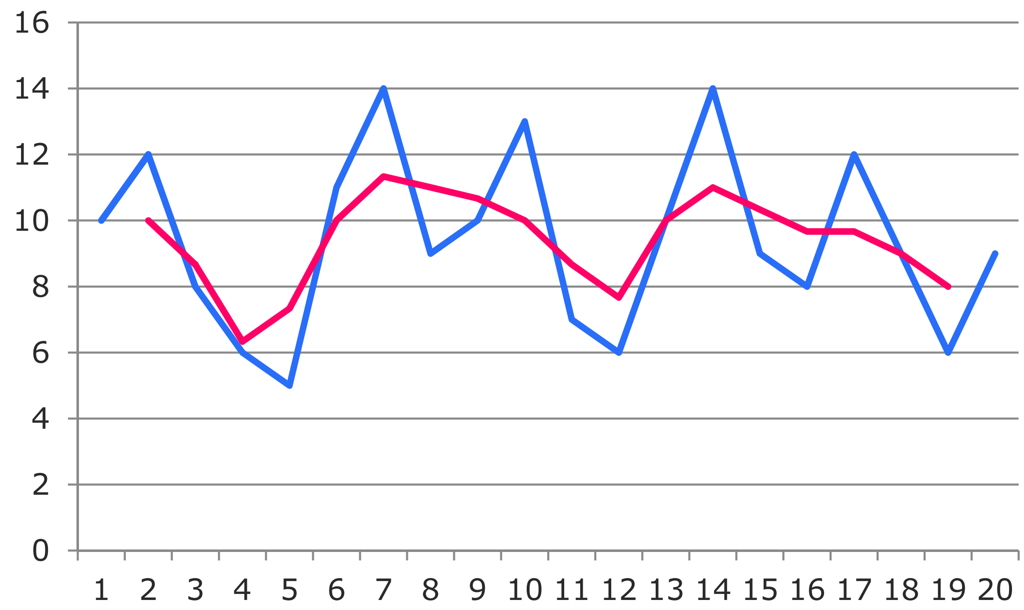
pro m sudé třeba

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=k-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{k+(m\,\mathrm{div}\,2)} x(i) = \sum_{i=k-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{k+(m\,\mathrm{div}\,2)} \frac{1}{m}\cdot x(i) = \sum_{i=k-m\,\mathrm{div}\,2+1}^{k+(m\,\mathrm{div}\,2)} a_i \cdot x(i)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

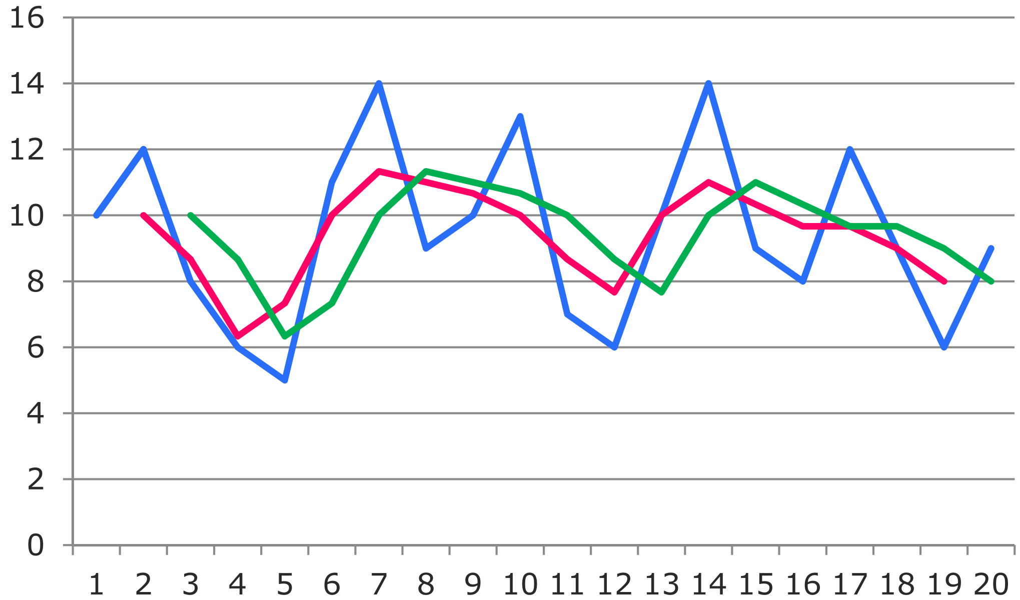


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

$m = 3$

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

přechodný děj = reakce na počáteční podmínky



$$\overline{x}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i)$$

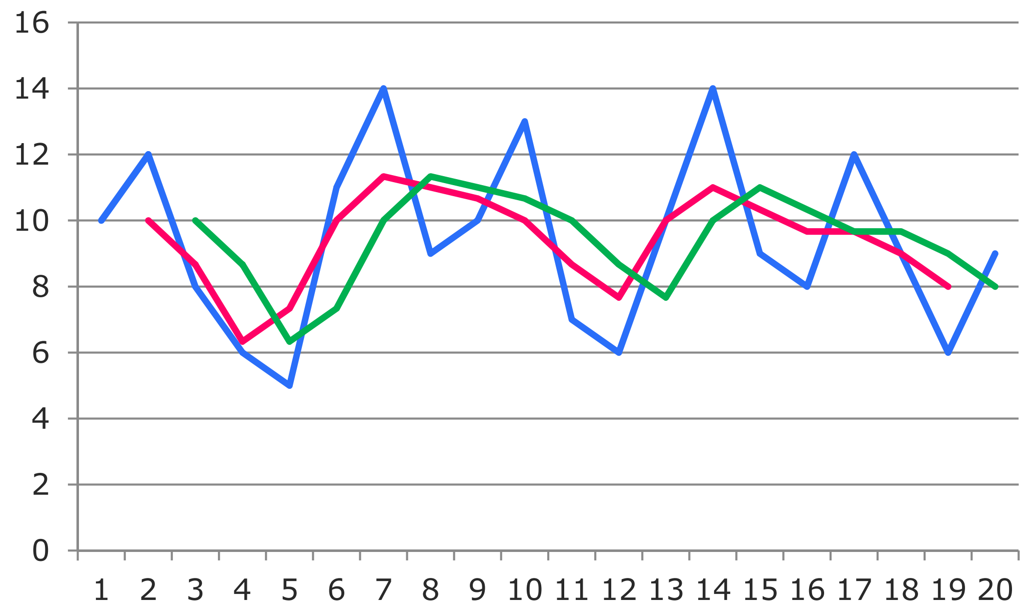
KAUZALITA ≡
≡ PŘÍČINNOST

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

nulové počáteční podmínky

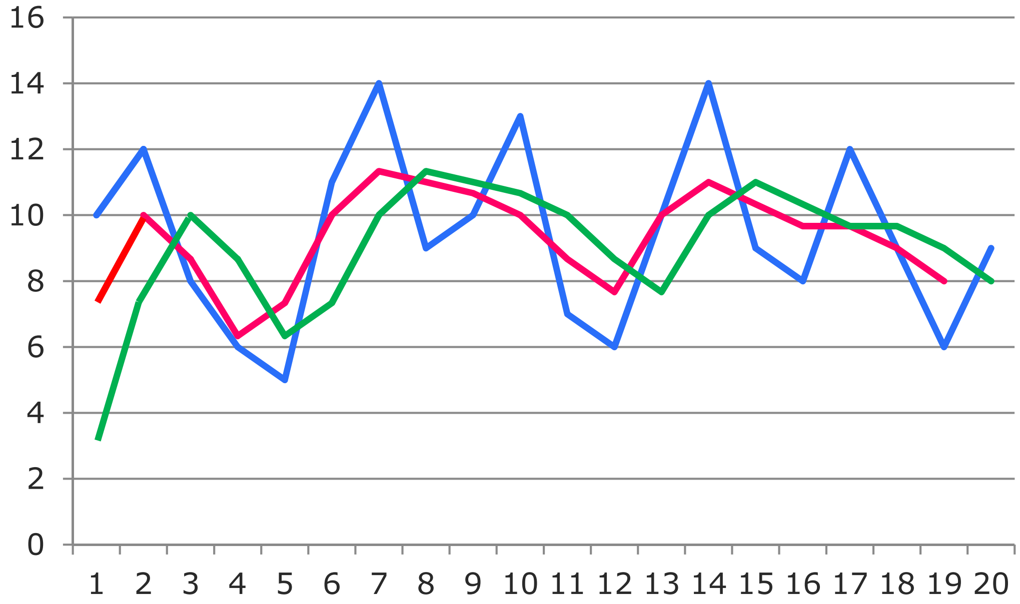


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	7,3	3,3
2	12	10,0	7,3
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

nulové počáteční podmínky x(0)=0, x(-1)=0

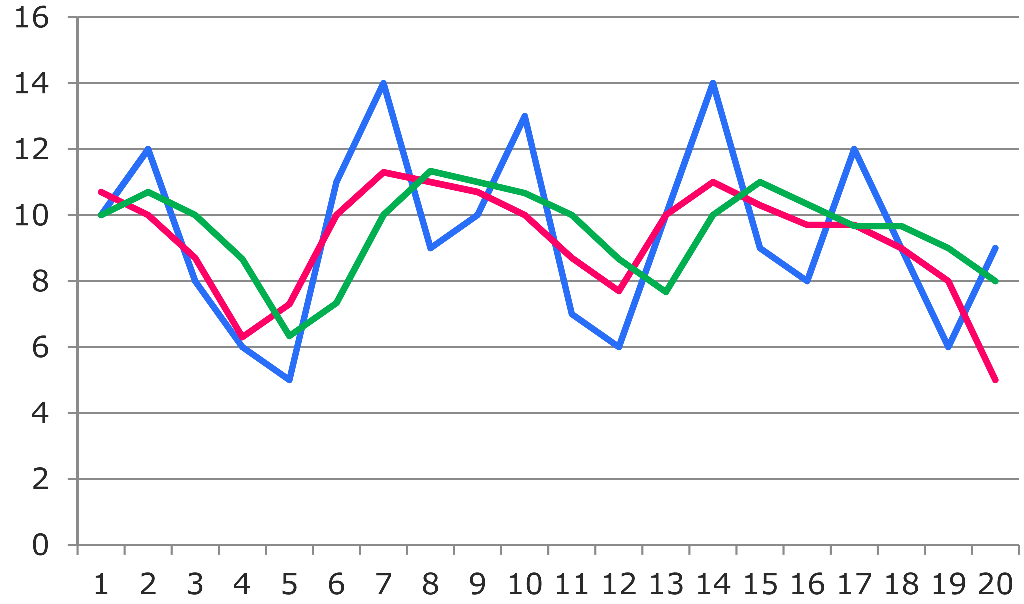


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

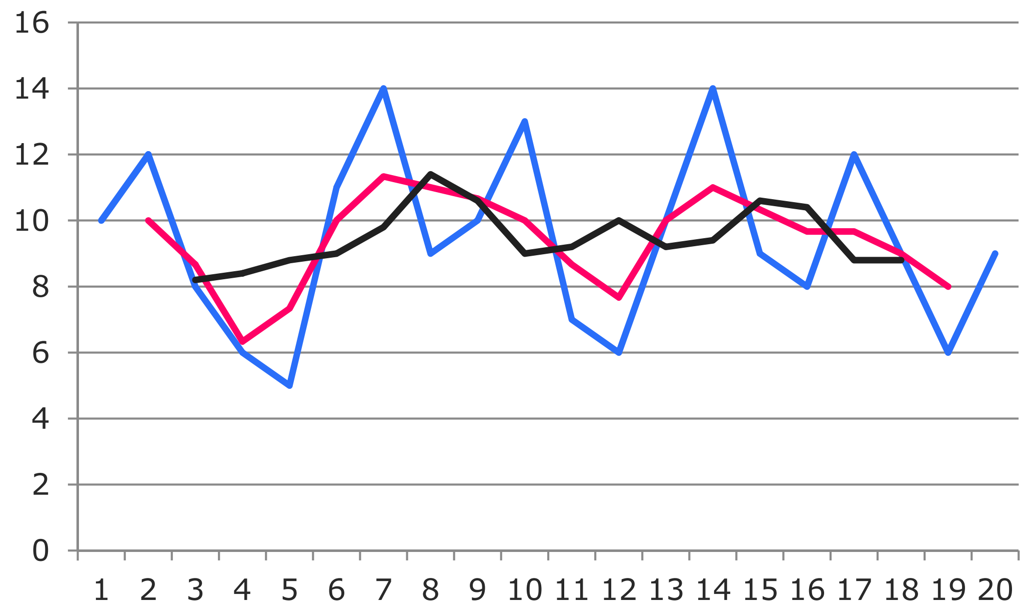
1	10	10,7	10,0
2	12	10,0	10,7
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

počáteční podmínky rovné první hodnotě
x(0) = 10, x(-1)=10



KLOUZAVÝ PRŮMĚR

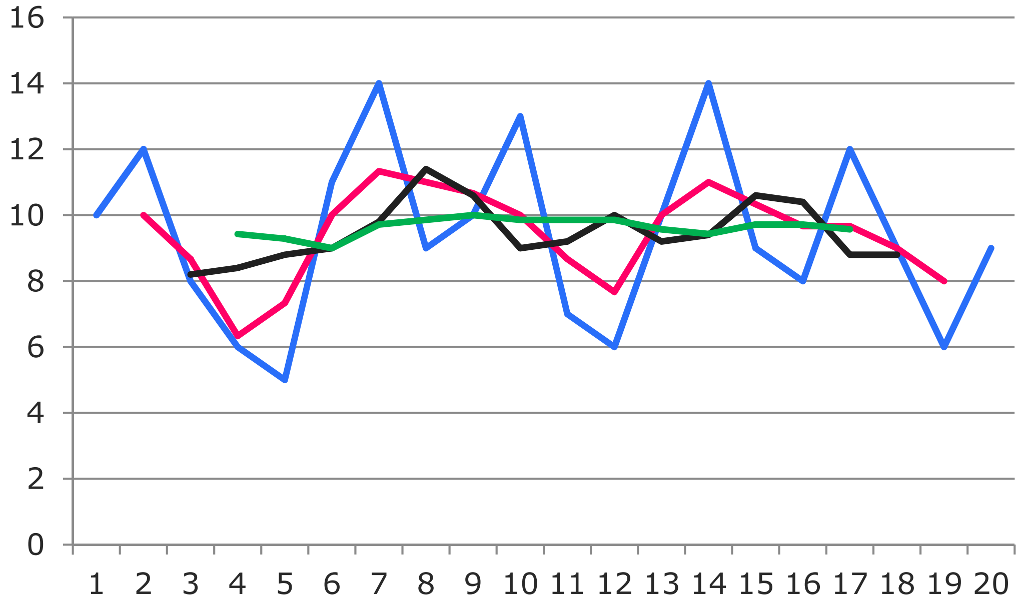
		m = 3	m = 5
1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		



a = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

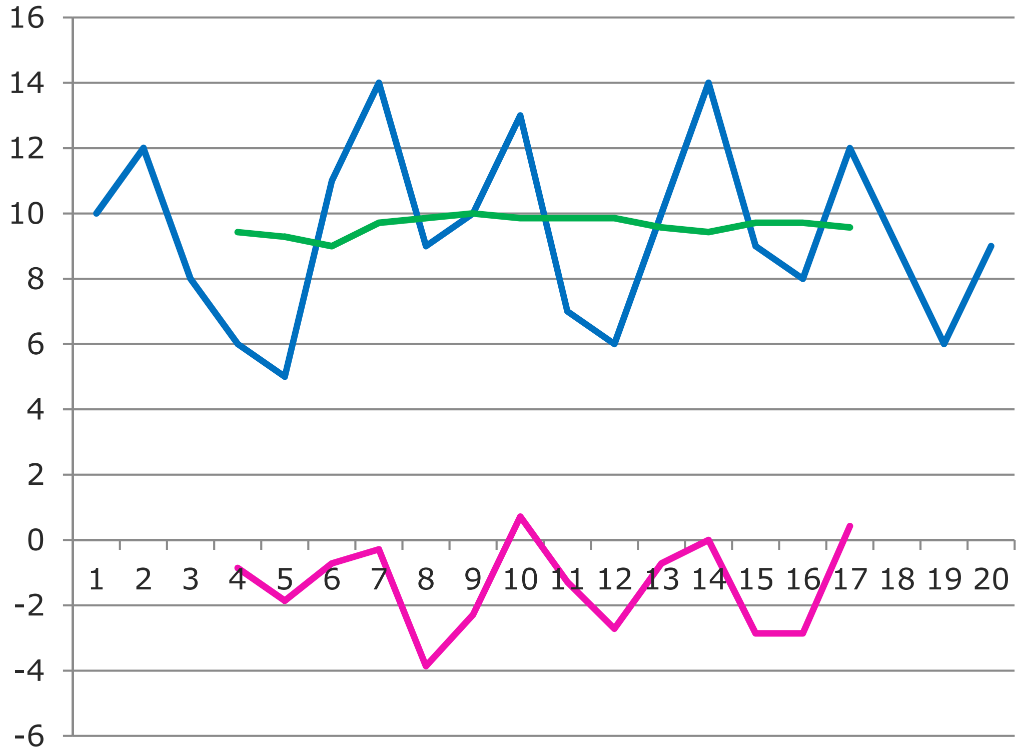
		m = 3	m = 5	m = 7
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

		m = 3	m = 7	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			

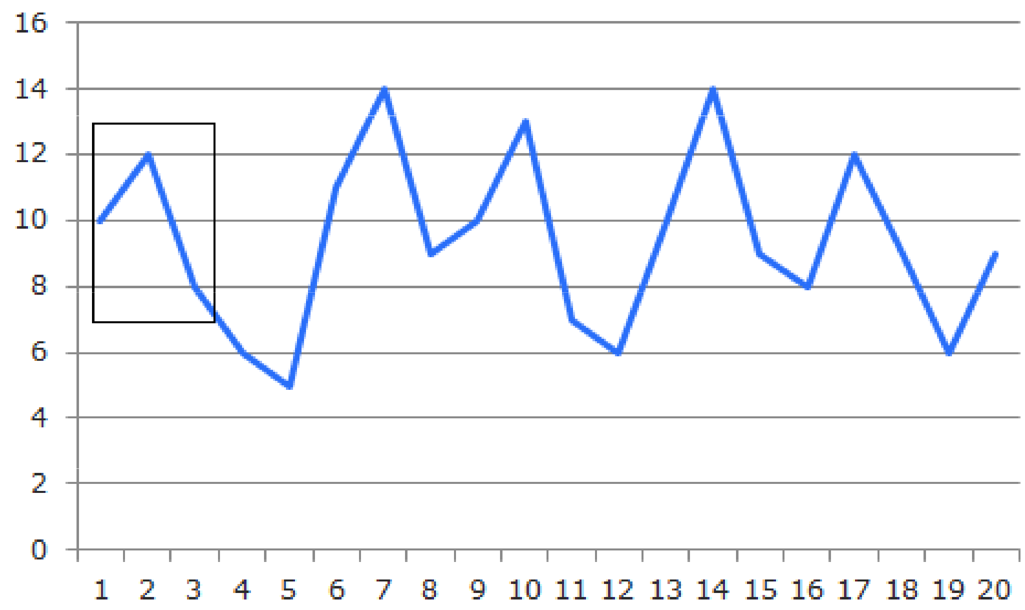


a = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7, -1/7, 1/7)

ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

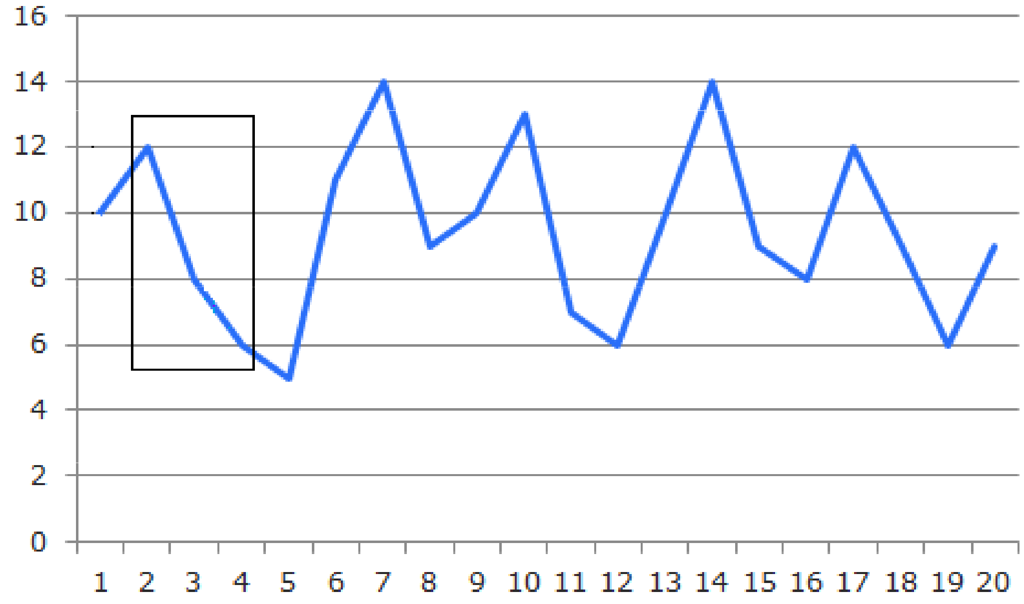
1. $$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot x(k-i)$$



ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1. $$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot x(k-i)$$



ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1. $$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot x(k-i)$$

2. $$\bar{x}(k) = y(k) = \frac{1}{m}\left(m \cdot y(k-1) + x(k) - x(k-m)\right)$$

rekurze – používá staré hodnoty výstupních vzorků

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot y(k-j) + \sum_{i=0}^{m} a_i x(k-i)$$

NOVÉ POJMY

- ☑ koeficienty odpovídající žádanému průběhu časové řady (model);
- ☑ přechodný děj (odezva na počáteční podmínky);
- ☑ kauzalita;
- ☑ rekurze.

IV. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

ZÁKLADNÍ POJMY

VELIČINY ☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné veličiny vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) **modely**;
- ☑ model veličiny by měl splňovat dva základní požadavky:
  - ➔ výstižnost, přesnost;
  - ➔ jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE VELIČIN
(A JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) spojité a diskrétní

B) reálné a komplexní

C) deterministické a nedeterministické (náhodné?)

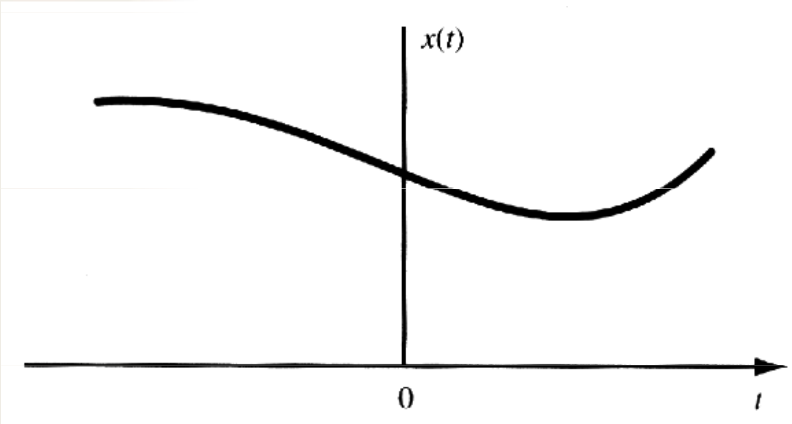
D) periodické a neperiodické

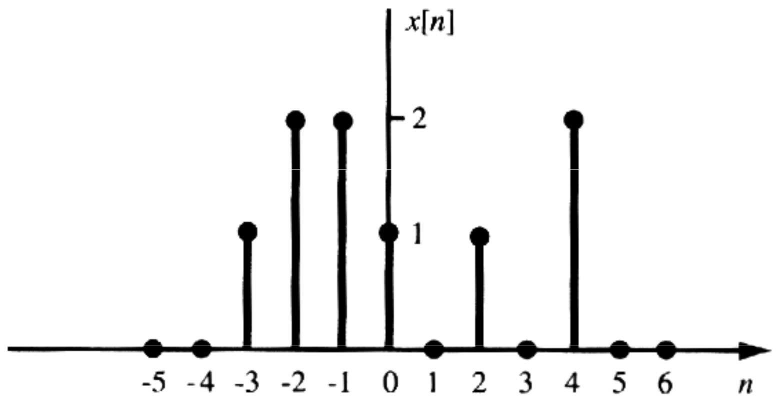
E) sudé a liché

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- **Spojitá veličina**(přesněji **veličina se spojitým časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- **Diskrétní veličina** (přesněji **veličina s diskrétním časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní veličinu proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY





A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá;
  - ➔ diskrétní;

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá
  - diskrétní

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

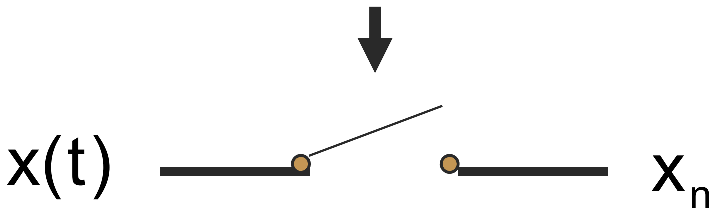
- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá
  - diskrétní

Délka dat

budeme se zabývat posloupnostmi od desítek vzorků

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- U diskrétní veličiny není její hodnota mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní veličinu lze také získat **vzorkováním** spojité veličiny: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$, ... (též značení x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

diskrétní veličinu můžeme zapsat

➔explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

(zde se implicitně předpokládá, že pořadí prvků je číslováno od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

➔funkčním předpisem (modelem), např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ VELIČINY

- ☑ **Reálná veličina (model)** je taková, která nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- ☑ **Komplexní veličina (model)** je taková, která nabývá komplexních hodnot. (Hypotetická, v praxi neměřitelná.)

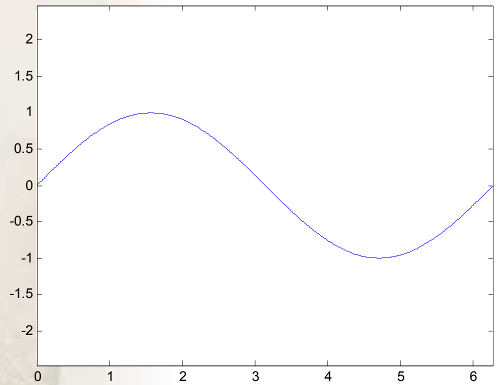
$$x(t) = x_1(t) + i x_2(t), \text{ resp. } x(t) = x_1(t) + j x_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

C) DETERMINISTICKÉ A NEDETERMINISTICKÉ (NÁHODNÉ) VELIČINY

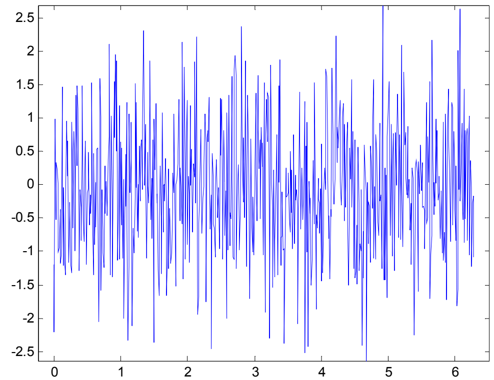
- **Deterministická veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Taková veličina může být popsán analytickou funkcí času *t*.

- **Nedeterministická (náhodná, stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum, definované rozložení, momenty.



$$x(t) = \sin t$$

$N(0,1)$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

- ☑ **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

!!! POZOR POZOR !!!

Náhodnost není generickou vlastností dané veličiny, tuto vlastnost jí přisuzuje předpokládaný matematický nástroj.

! POHOV !

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná (stochastická) veličina je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

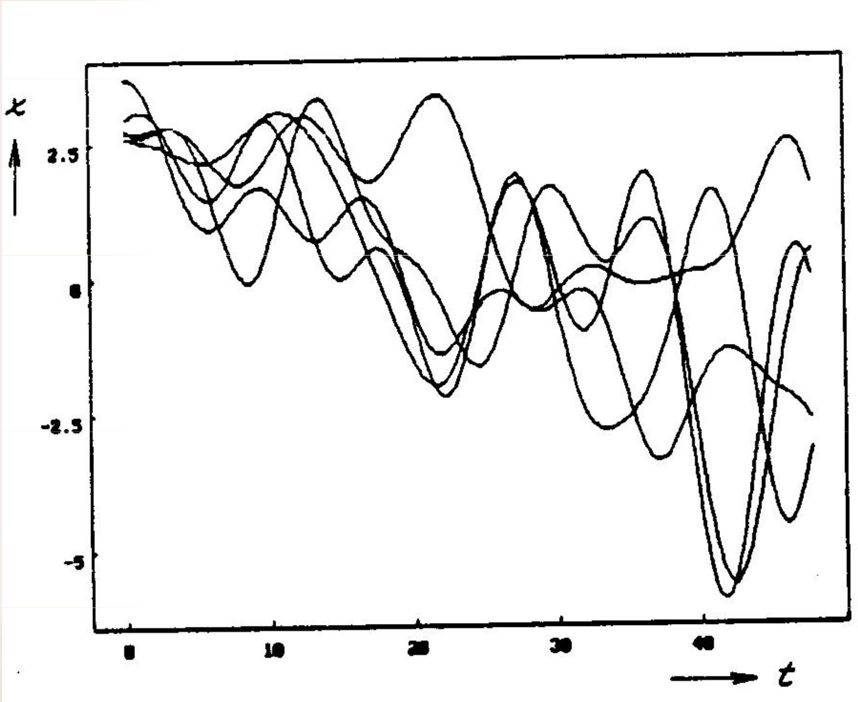
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

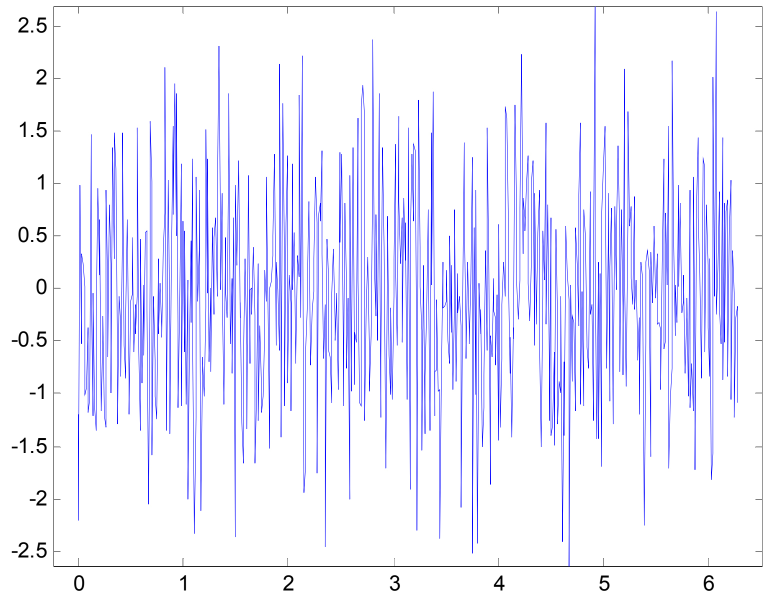
- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním

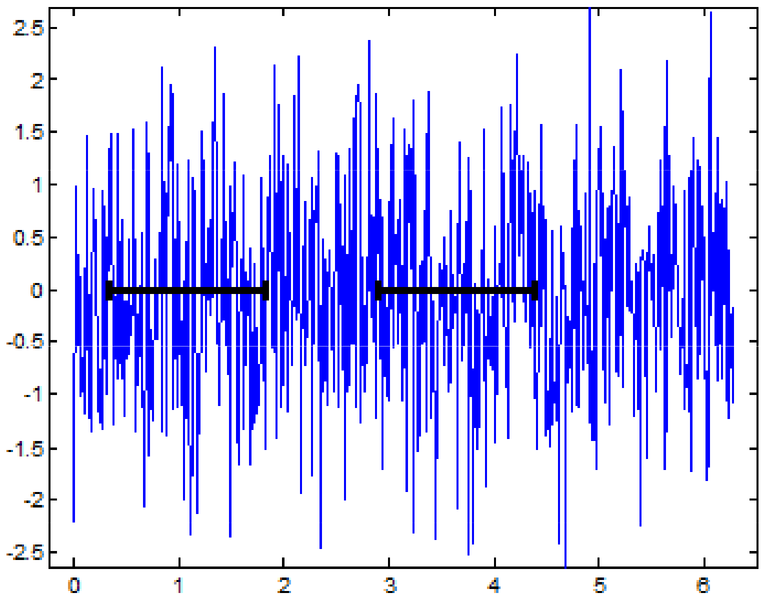




STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak (záleží na definici a přístupu).

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Spojitá veličina $x(t)$ je **periodická s periodou *T***, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t+T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

$$x(t+kT) = x(t),$$

kde k je celé číslo.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

Pozor!

- Pro konstantní veličinu není definována základní perioda. Konstantní veličina je periodická pro každou hodnotu *T*.
- Spojitá veličina, který není periodická se nazývá **neperiodická** nebo **aperiodická**.
- Reálné veličiny, např. biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních veličinách**.

Pohov!

řečový signál – samohláska „e"

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskrétní veličinu (časovou řadu) definujeme periodicitu s periodou N obdobně

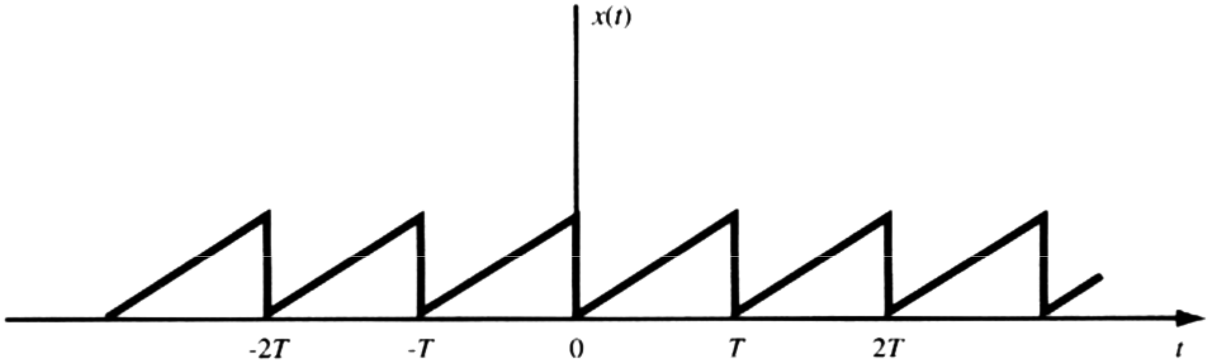
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

Pozor!

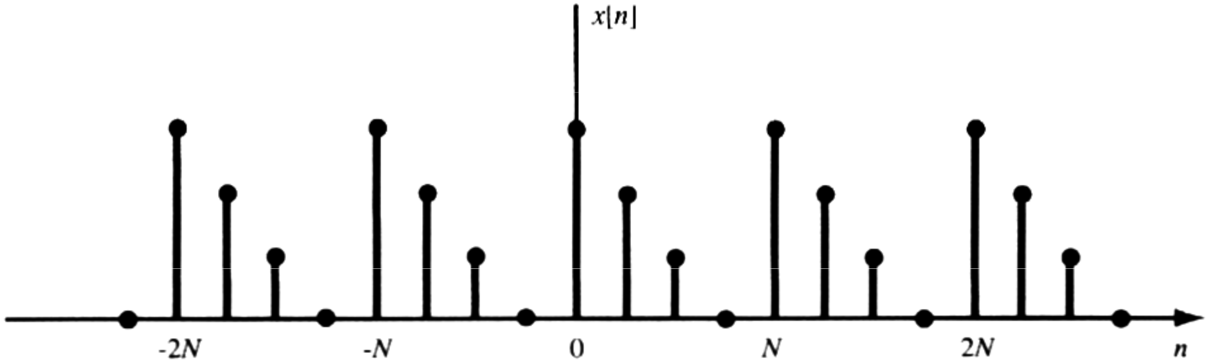
- ☑ Diskrétní veličina (časová řada) získaná rovnoměrným vzorkováním periodické spojité veličiny **nemusí** být periodická.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických veličin **nemusí** být periodická veličina.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických veličin s tímtéž vzorkováním **je vždy** periodická veličina.

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY



(a)



(b)

E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

- **Sudá veličina** je taková, pro níž platí

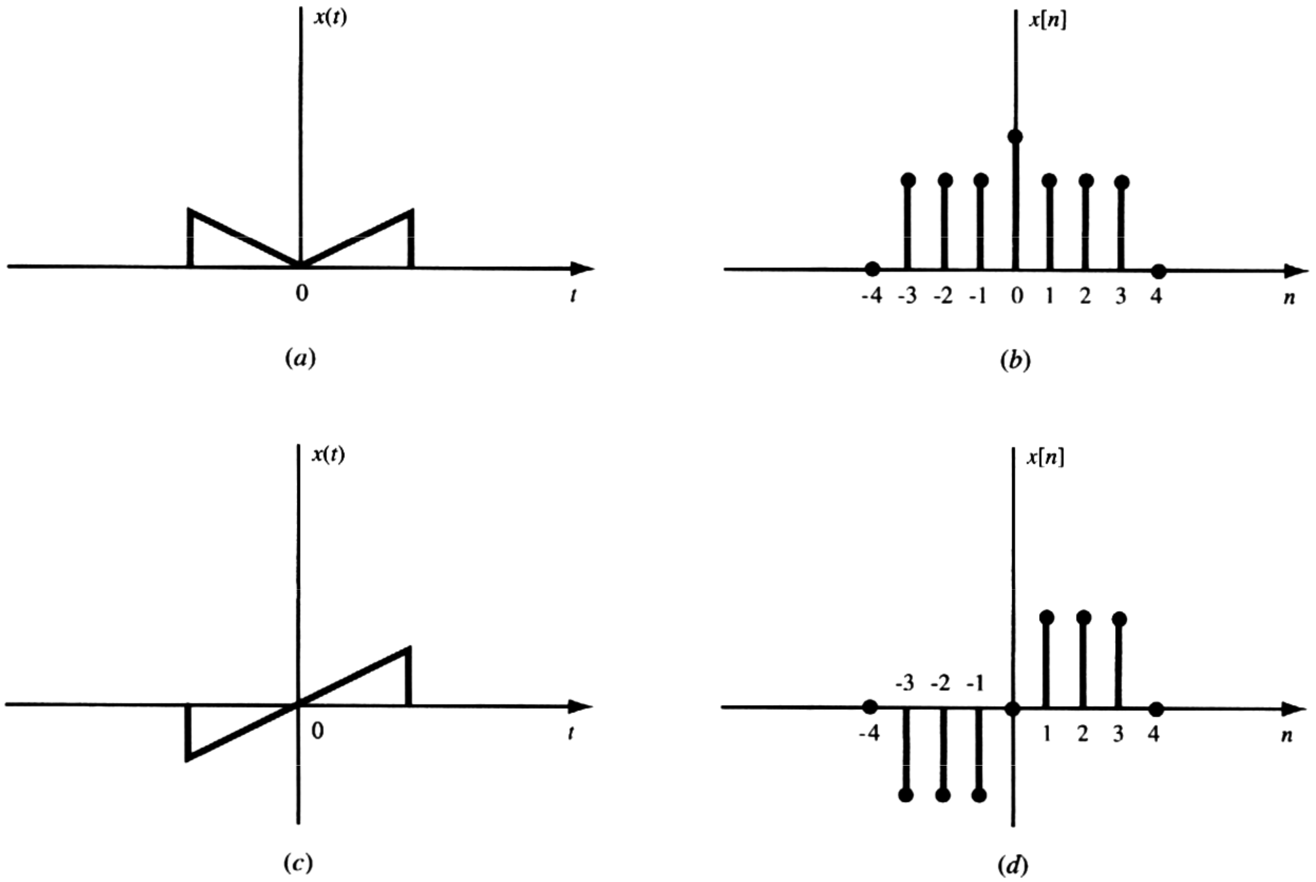
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichá veličina** je taková, pro níž platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudé a liché veličiny je lichá veličina.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých veličin je sudá veličina.

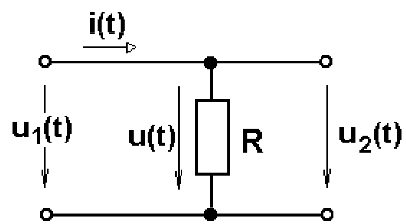
E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY



JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že výkon p(t) v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojité funkce x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

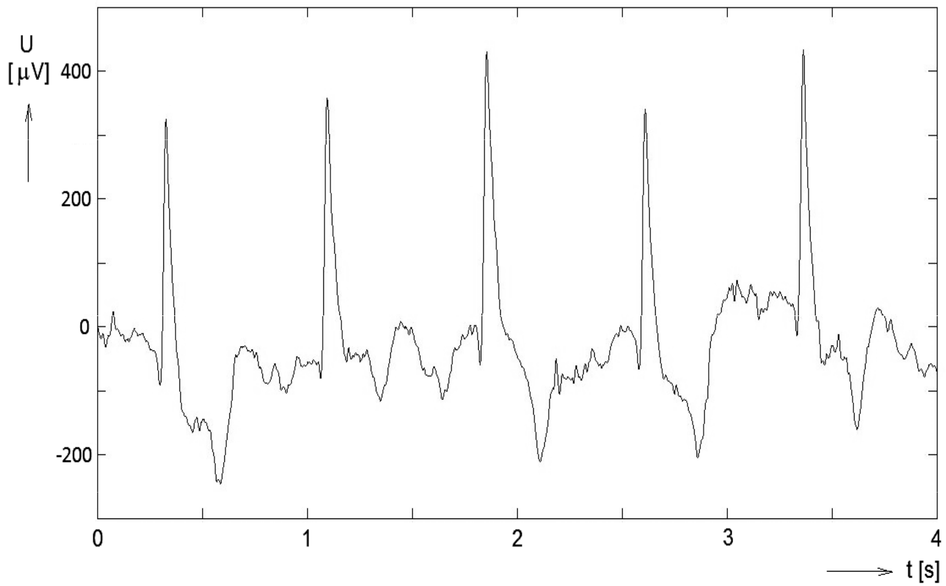
SHRNUTÍ

- ☑ jaké typy veličin známe (dle vlastností)?
- ☑ stacionarita, ergodicita;
- ☑ energie, výkon

ZA TÝDEN NASHLEDANOU

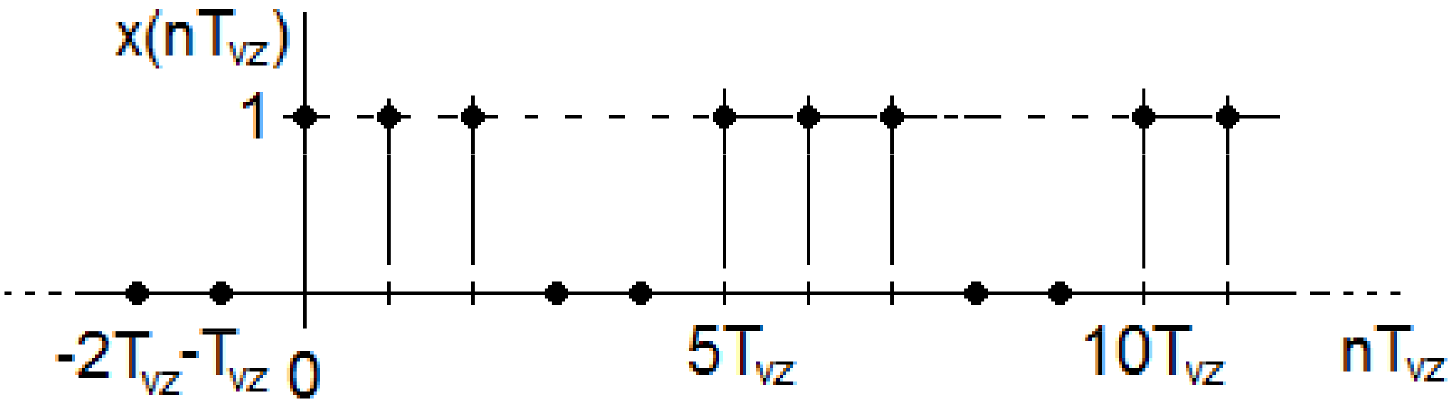
V. MATEMATICKÉ MODELY ČASOVÝCH ŘAD

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

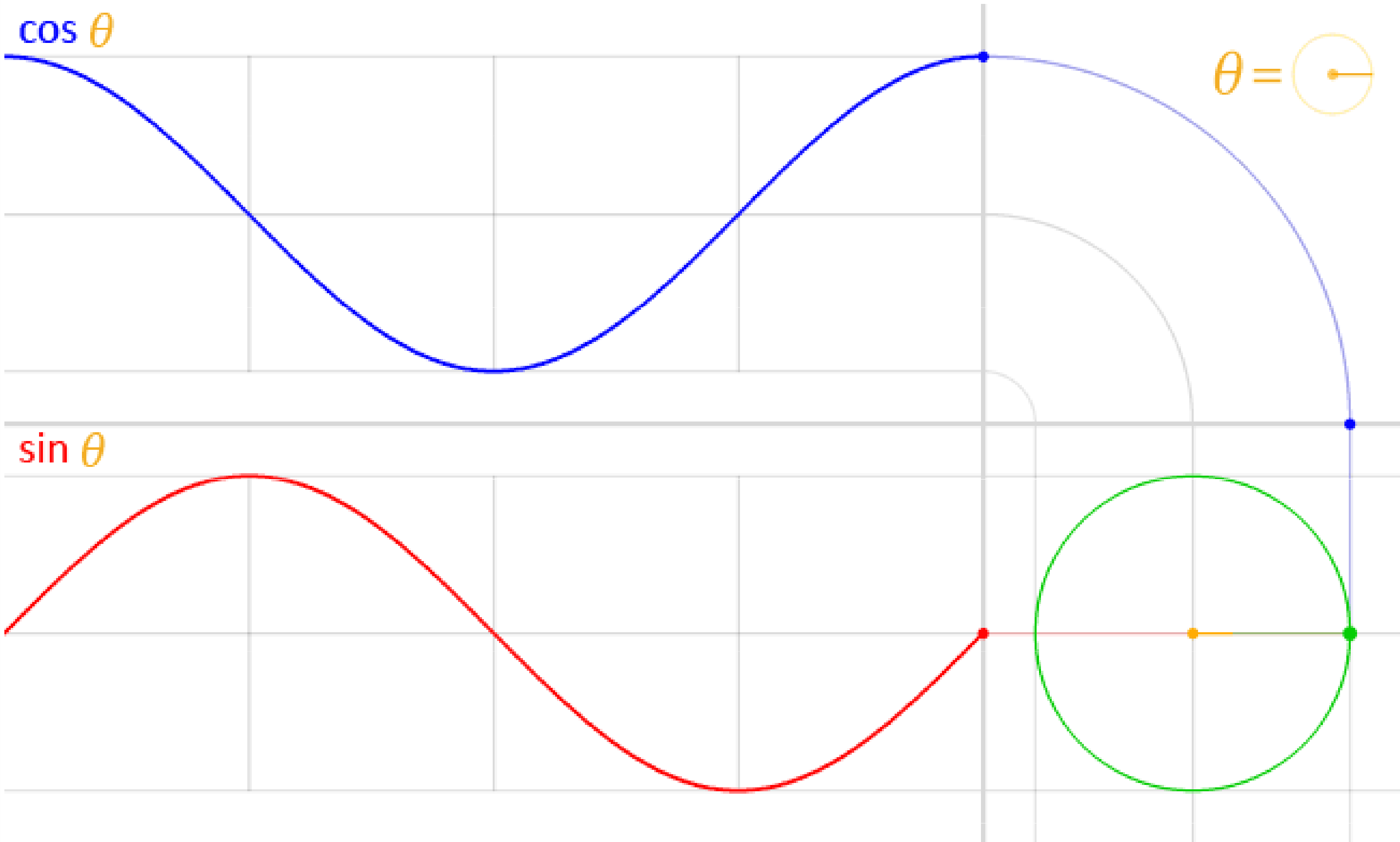
$$x(nT_{vz}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in \langle 5k; 5k+2 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 0 & \text{pro } n \in \langle 5k+3; 5k+4 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{cases}$$



$x(nT_{vz}) = \{\ldots,0,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,1,\ldots\}$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

HARMONICKÁ POSLOUPNOST



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif

$\Theta = f(t) \Rightarrow \cos(t), \sin(t) \Rightarrow \cos(nT_{vz}), \sin(nT_{vz})$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- ☑ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické posloupnosti;

Ω >0 je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $nT_{vz} = 0$;

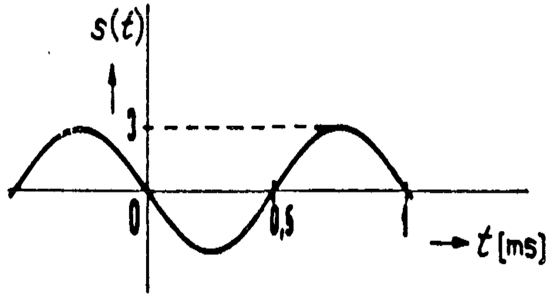
$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$



AMPLITUDA

Amplituda (též **výkmit** či **rozkmit**) je *maximální hodnota* periodicky měnící se veličiny. Spolu s frekvencí/úhlovou frekvencí, počáteční fází a u vln též vlnovou délkou/vlnovým vektorem je amplituda jedním ze základních parametrů periodických dějů.

Etymologie:

z latiny „amplitudo" – rozsáhlost, rozpětí, velikost; znamenitost; důstojnost

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- ☑ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické posloupnosti;

Ω >0 je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase nT_{vz} =0 ;

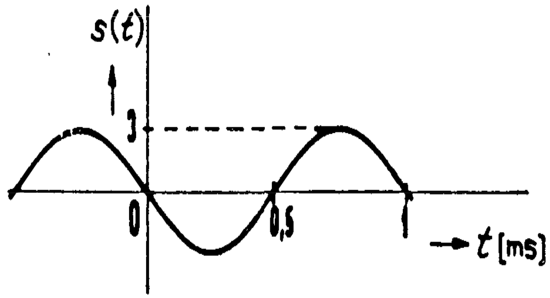
$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické posloupnosti;

Ω >0 je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase nT_{vz} =0 ;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega \Rightarrow \Omega = 2\pi/T \Rightarrow \Omega.T_{vz} = \Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T$$

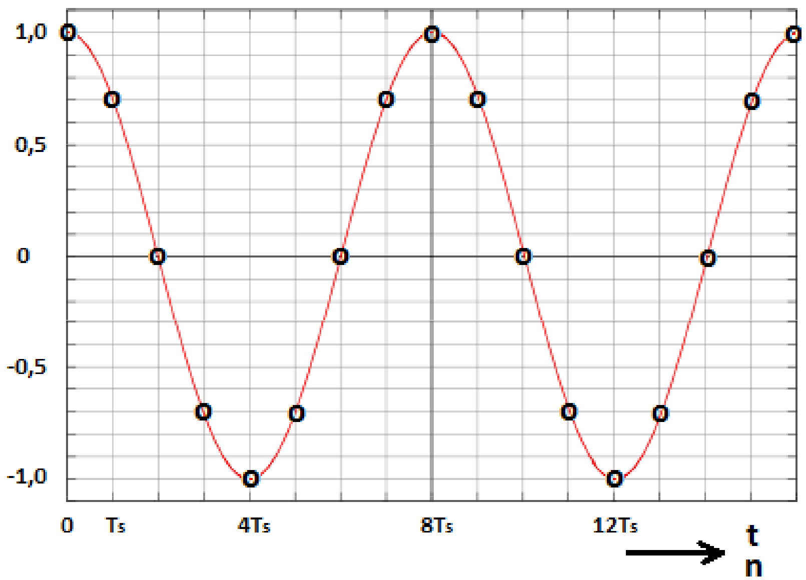
kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi \Rightarrow f_N = T_{vz}/T = \Omega_N/2\pi = f/f_{vz}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=8T_{vz}$



$T_s \equiv T_{vz}$

vz … vzorkování

s … sampling

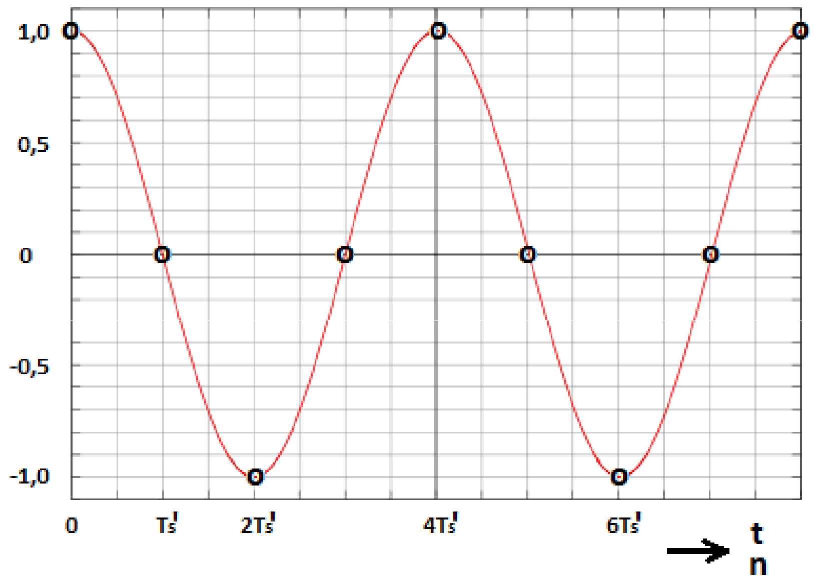
$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a $\Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T = \pi/4$

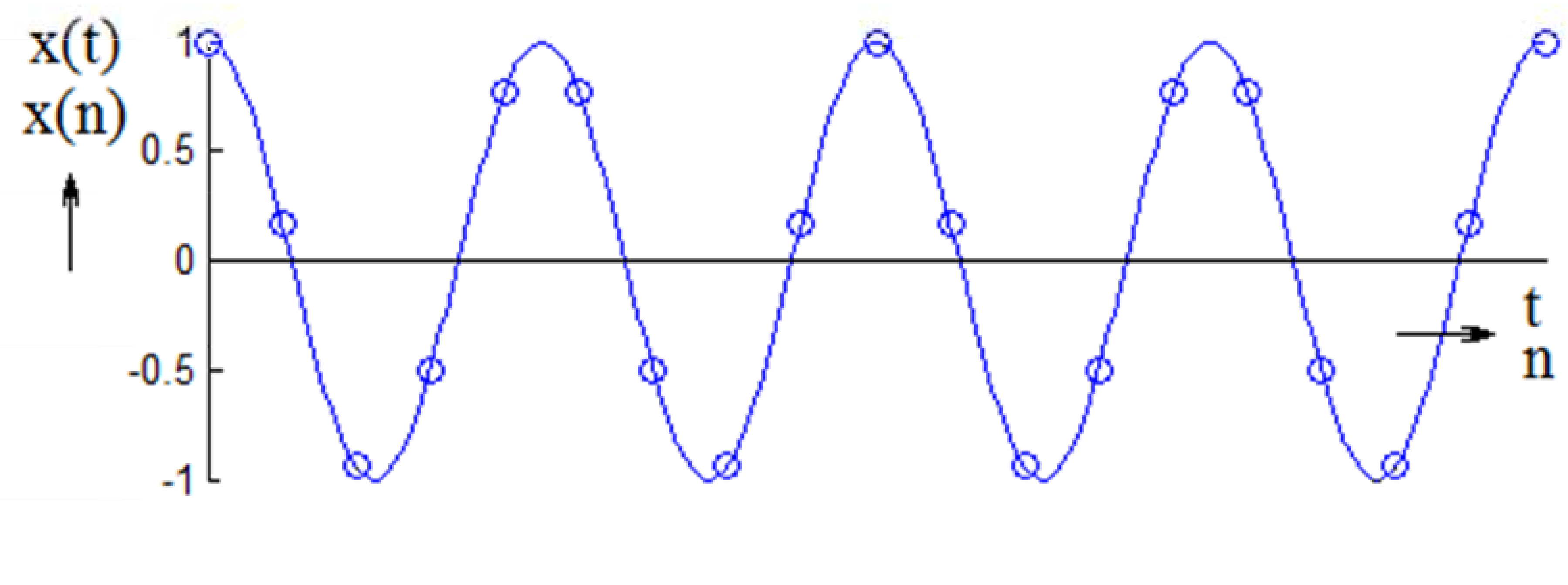
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=4T'_{vz}$



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

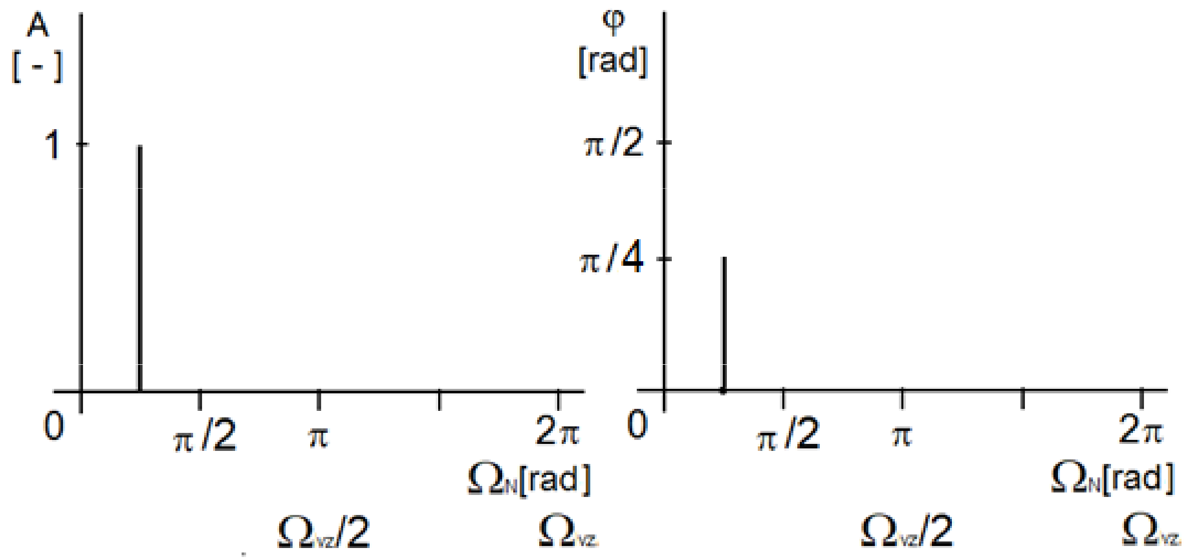


Změna periodicity veličiny po vzorkování se vzorkovací periodou, která neodpovídá bezezbytkovému celočíselnému podílu T/T_{vz} (desetinná část podílu je rovna 0,5).

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

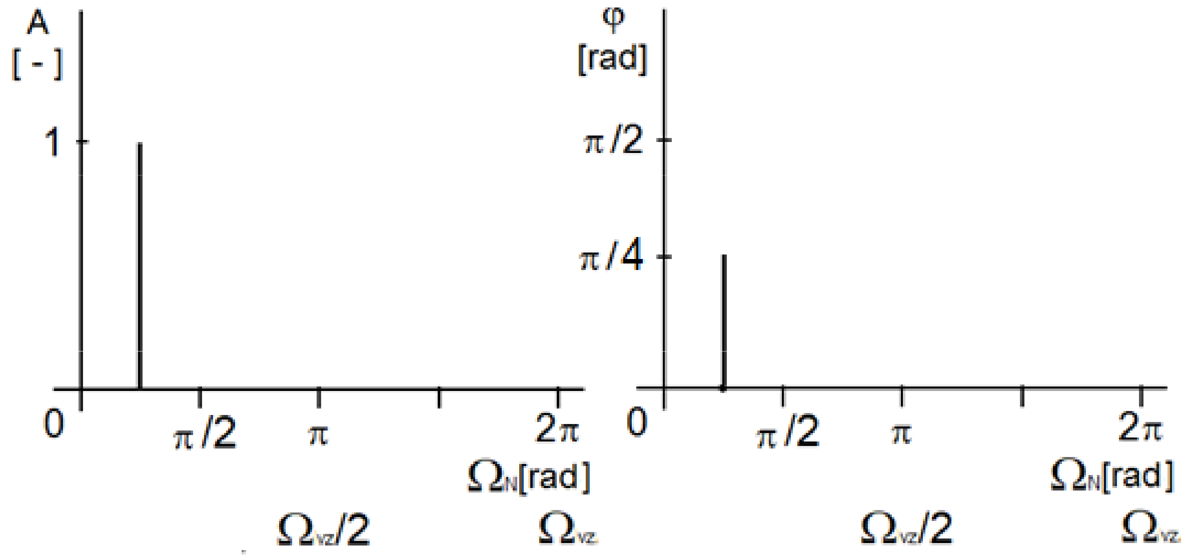
pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda x (úhlový) kmitočet a

počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\Omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\Omega);$$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum časové řady je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se časová řada skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT! ! NA VĚKY !

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz}+\varphi_0) =$$
$$= A_1.\cos(\Omega nT_{vz}) + A_2.\sin(\Omega nT_{vz})$$

Jak to tak?

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

$$A\cos(\Omega nT_s + \varphi_0) = A.\cos(\Omega nT_s).\cos\varphi_0 - A.\sin(\Omega nT_s).\sin\varphi_0 =$$
$$= \underbrace{A.\cos\varphi_0}_{A_1}.\cos(\Omega nT_s) - \underbrace{A.\sin\varphi_0}_{A_2}.\sin(\Omega nT_s)$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$A_1 = A.\cos\varphi_0 \quad a \quad A_2 = -A.\sin\varphi_0$$

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2.(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)$$

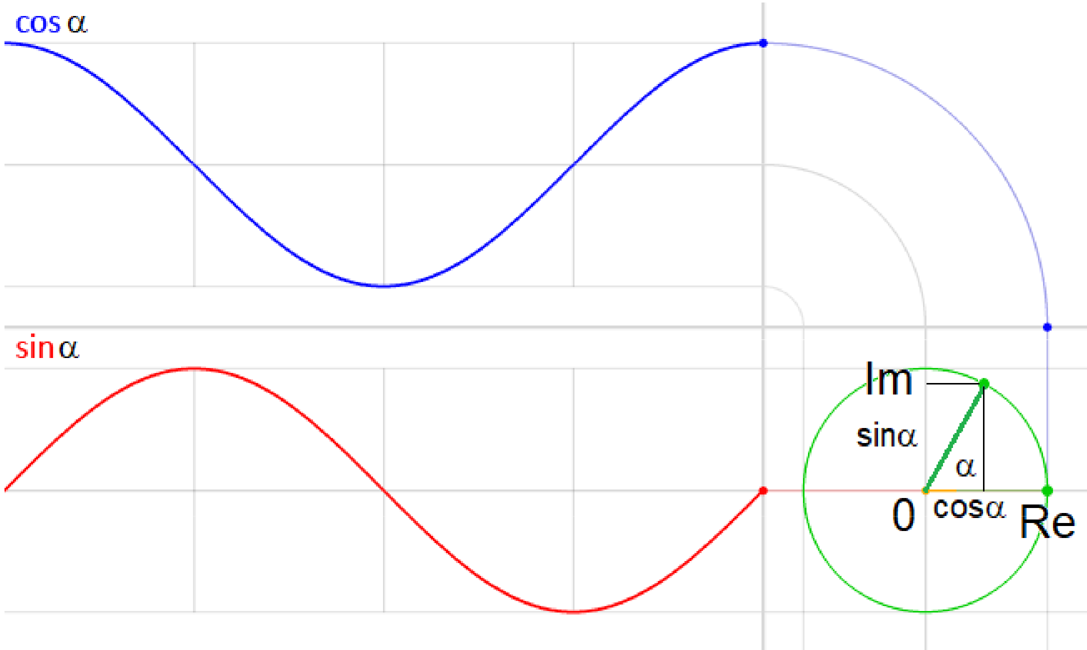
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-A \cdot \sin\varphi_0}{A \cdot \cos\varphi_0} = -\mathrm{tg}\varphi_0.$$

$$\varphi_0 = -\mathrm{arctg}\frac{A_2}{A_1}.$$

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR



$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(2\pi f\, nT_{vz} + \varphi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, n}{N} + \varphi_0),$$

když T = NT_{vz} a tedy f = 1/NT_{vz} nebo

$$x(nT_{vz}) = A.\exp\left[i(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0)\right].$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x\left[(k+N)T_{vz}\right] = \exp\frac{i2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{i2\pi k}{N}.\exp(i2\pi),$$

když exp(i2π) = cos(2π) + i.sin(2π) = 1 + i0 = 1

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$
$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Eulerovy vztahy

$$x(n) = A.\cos(\alpha(n)) = \mathrm{Re}\{A.e^{i\alpha(n)}\}$$

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$x(n) = \mathcal{Re}\{\dot{x}(n)\} = \mathcal{Re}\{A.\exp[i(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

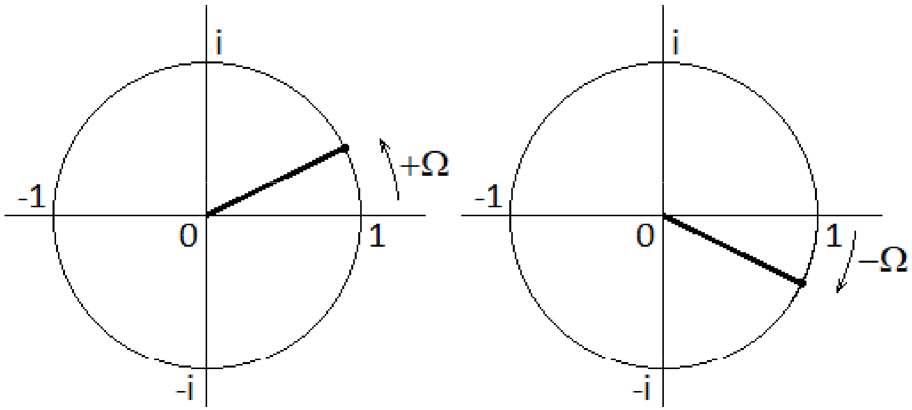
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

kupodivu lze použít i vztah

$$x(n) = \mathit{Re}\{A.\exp[i(-\Omega n T_{vz} - \varphi_0)]\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(n)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

Protože platí

$$x(n) = \mathit{Re}\{\dot{x}(n)\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(n)\} \text{ a } \mathit{Im}\{\dot{x}(n)\} = -\mathit{Im}\{\dot{x}^*(n)\}$$

je i

$$x(n) = ½.\{\dot{x}(n) + \dot{x}^*(n)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(i\varphi_0).\exp(i\Omega nT_{vz})\} +$$
$$+ ½.\{A\exp(-i\varphi_0).\exp(-i\Omega nT_{vz})\}$$

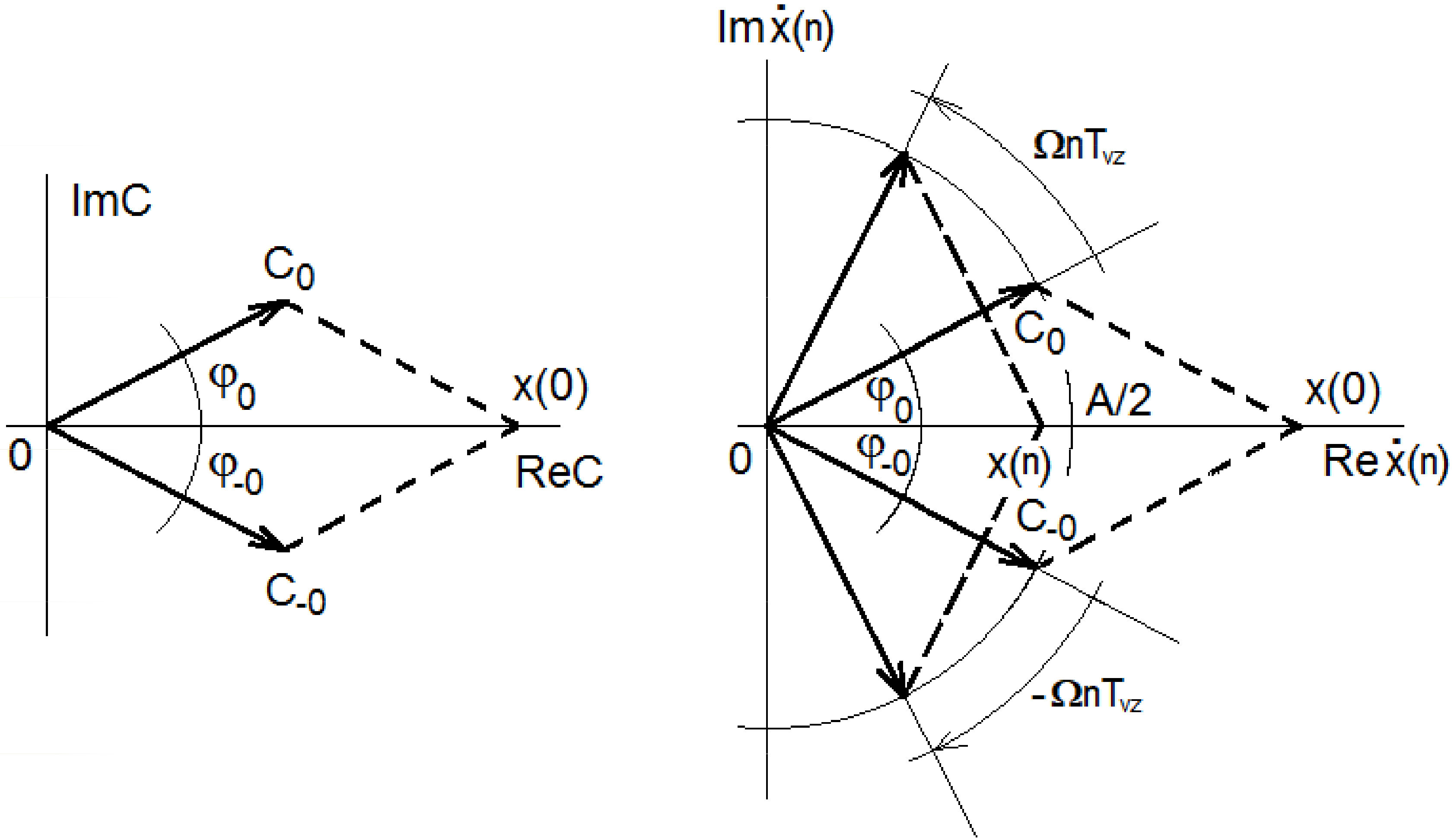
Označíme-li

$$\dot{C}_0 = ½.A.\exp(i\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-0} = ½.A\exp(-i\varphi_0)$$

je

$$x(n) = \dot{C}_0.\exp(i\Omega nT_{vz}) + \dot{C}_{-0}.\exp[i(-\Omega)nT_{vz}]$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST



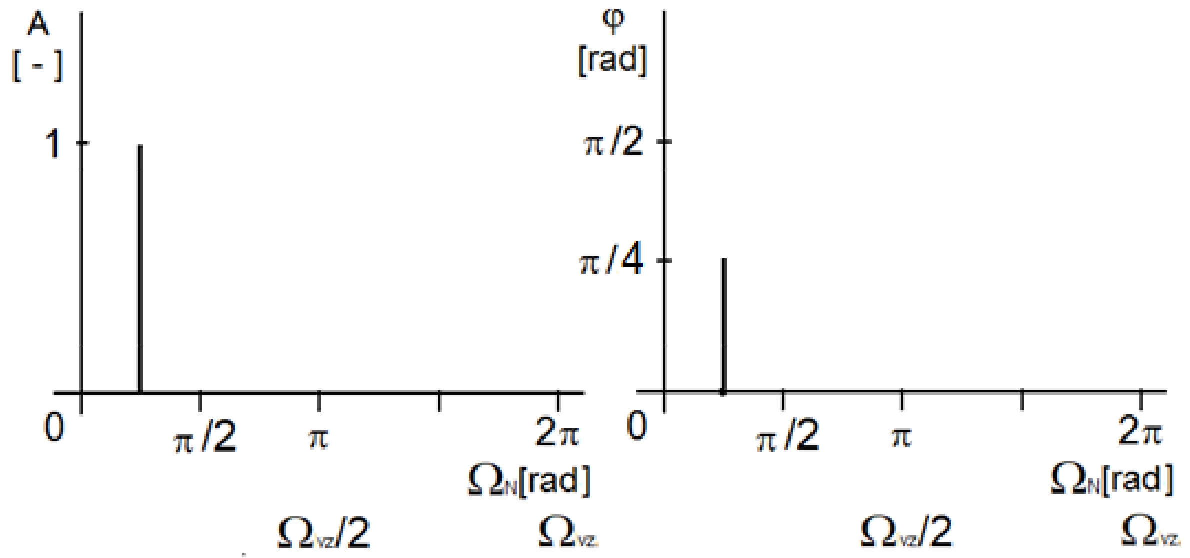
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz}+\pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

- třiparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách amplituda x (úhlový) kmitočet a počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

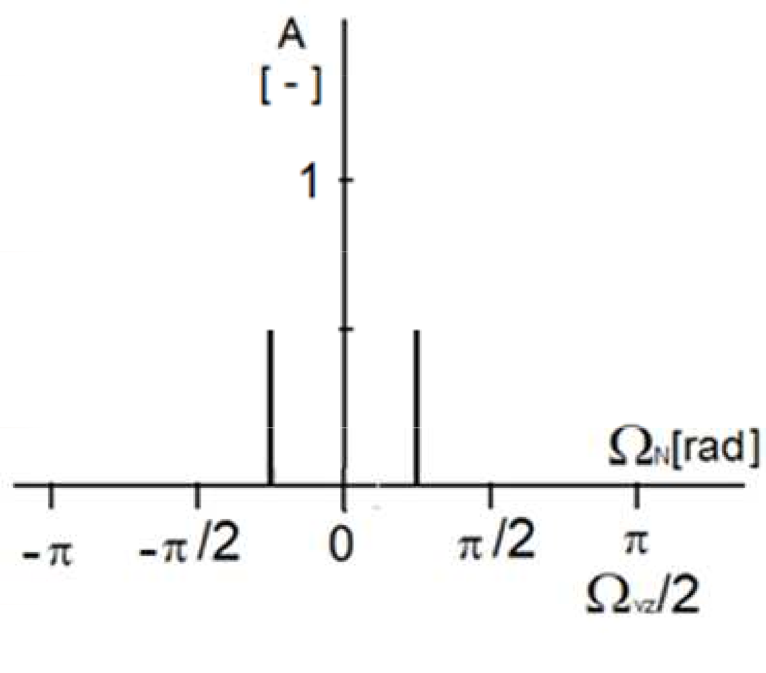
$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$

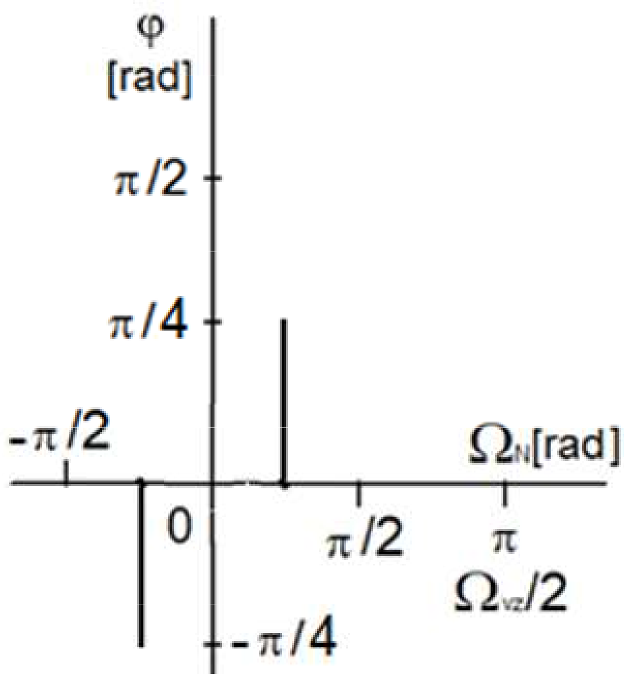


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz}+\pi/4)$
pro A=1, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



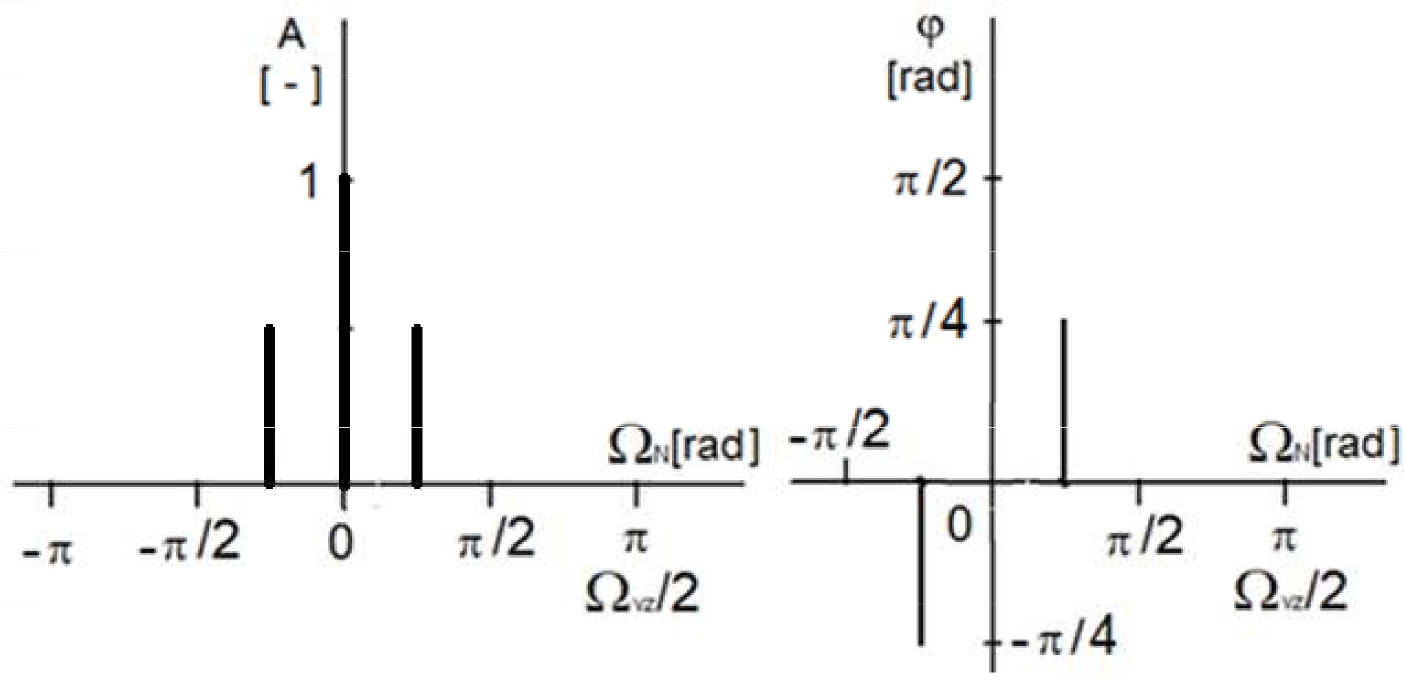


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = 1 + \cos(\Omega nT_{vz}+\pi/4)$$

pro A=1, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází