ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

V. MATEMATICKÉ MODELY ČASOVÝCH ŘAD

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- ☑ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A>0$ je amplituda harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$ je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $nT_{vz} = 0$;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

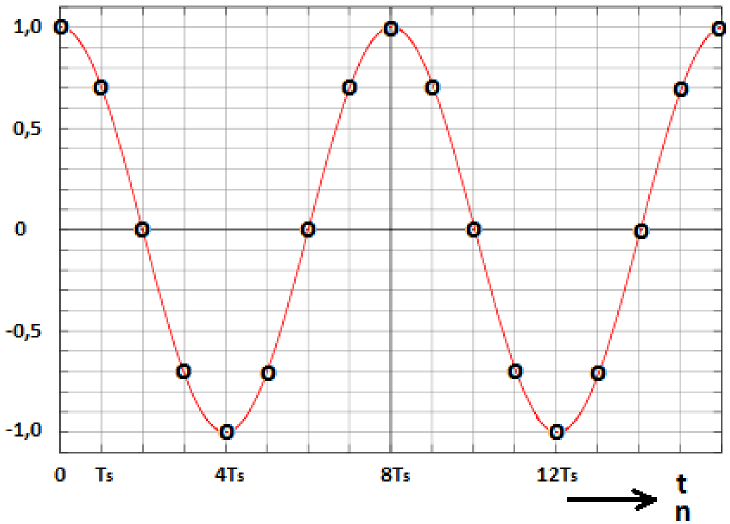
$$T = 2\pi/\Omega \Rightarrow \Omega = 2\pi/T \Rightarrow \Omega.T_{vz} = \Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi \Rightarrow f_N = T_{vz}/T = \Omega_N/2\pi = f/f_{vz}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$
pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=8T_{vz}$



$T_s \equiv T_{vz}$

vz … vzorkování

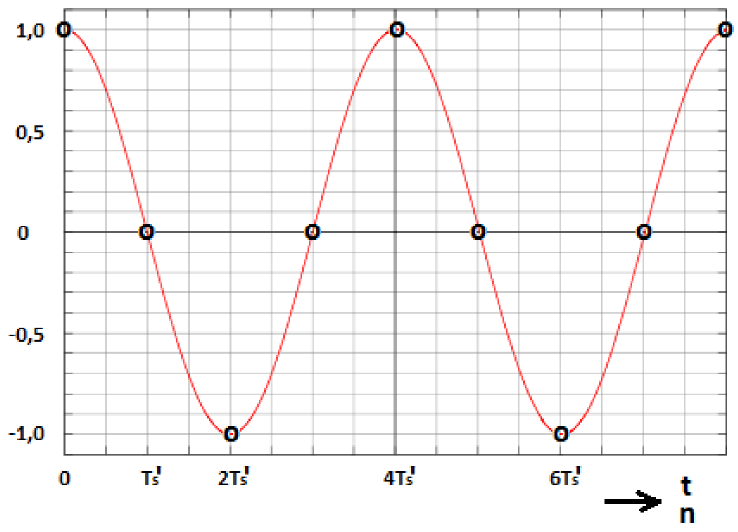
s … sampling

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$
pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a $\Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T = \pi/4$

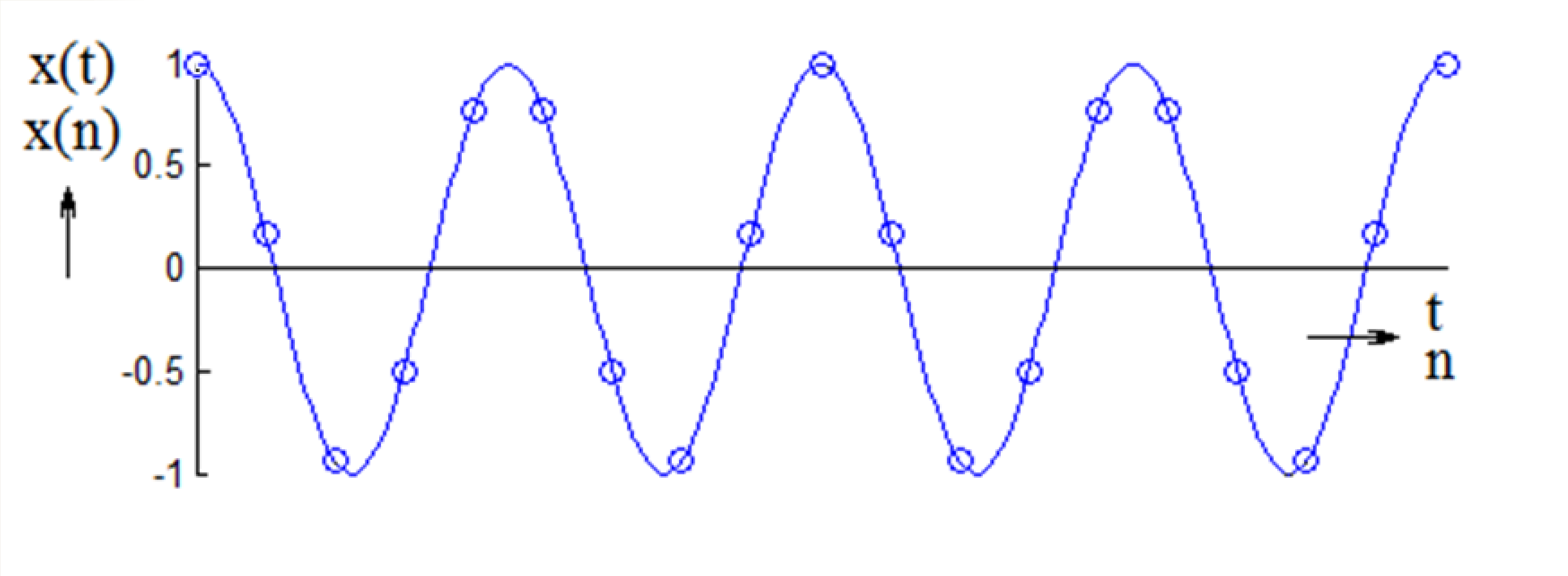
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=4T'_{vz}$

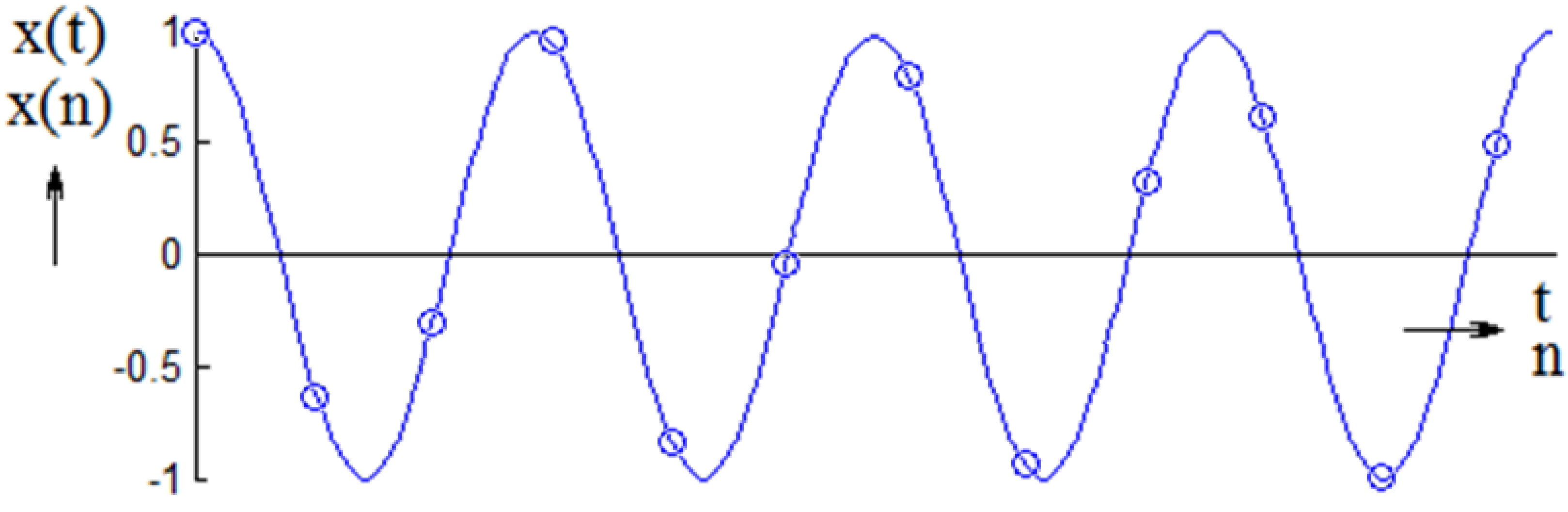


HARMONICKÁ POSLOUPNOST



Změna periodicity veličiny po vzorkování se vzorkovací periodou, která neodpovídá bezezbytkovému celočíselnému podílu T/T_{vz} (desetinná část podílu je rovna 0,5).

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

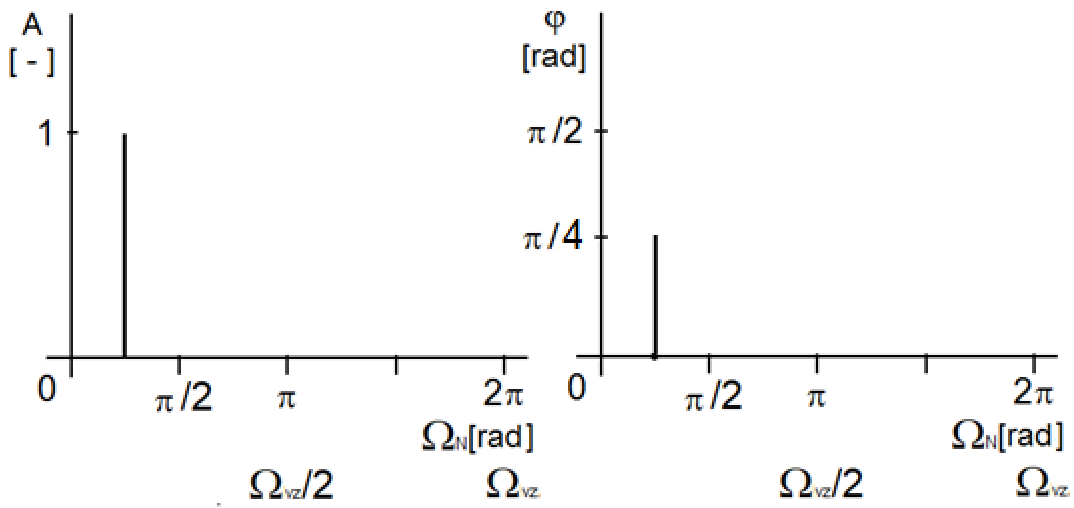


Změna periodicity veličiny po vzorkování se vzorkovací periodou, která neodpovídá bezezbytkovému celočíselnému podílu T/T_{vz} (desetinná část podílu je rovna 0,5).

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

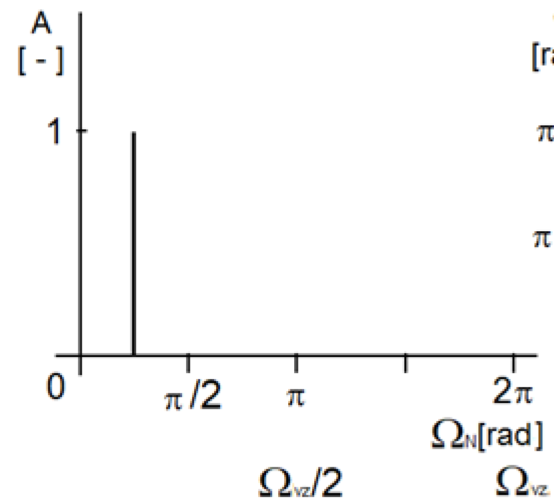
pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

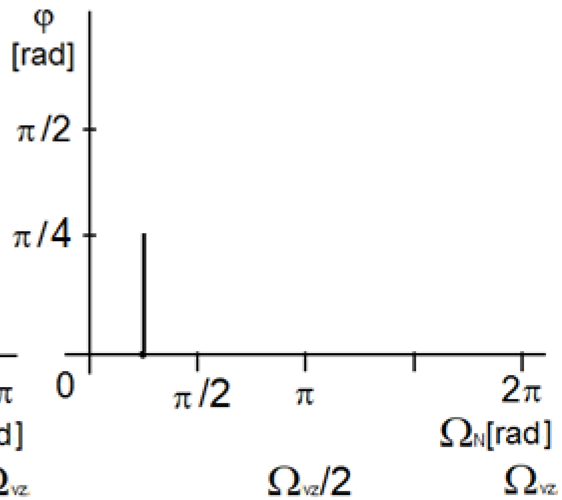
- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

  amplituda x (úhlový) kmitočet a

  počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

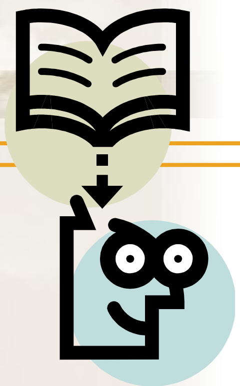
$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$





spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT!   ! NA VĚKY !

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz}+\varphi_0) =$$
$$= A_1.\cos(\Omega nT_{vz}) + A_2.\sin(\Omega nT_{vz})$$

Jak to tak?

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

$$A\cos(\Omega nT_s + \varphi_0) = A.\cos(\Omega nT_s).\cos\varphi_0 - A.\sin(\Omega nT_s).\sin\varphi_0 =$$
$$= \underbrace{A.\cos\varphi_0}_{A_1}.\cos(\Omega nT_s) - \underbrace{A.\sin\varphi_0}_{A_2}.\sin(\Omega nT_s)$$

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$A_1 = A.\cos\varphi_0$ a $A_2 = -A.\sin\varphi_0$

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2.(\cos^2\phi_0 + \sin^2\phi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

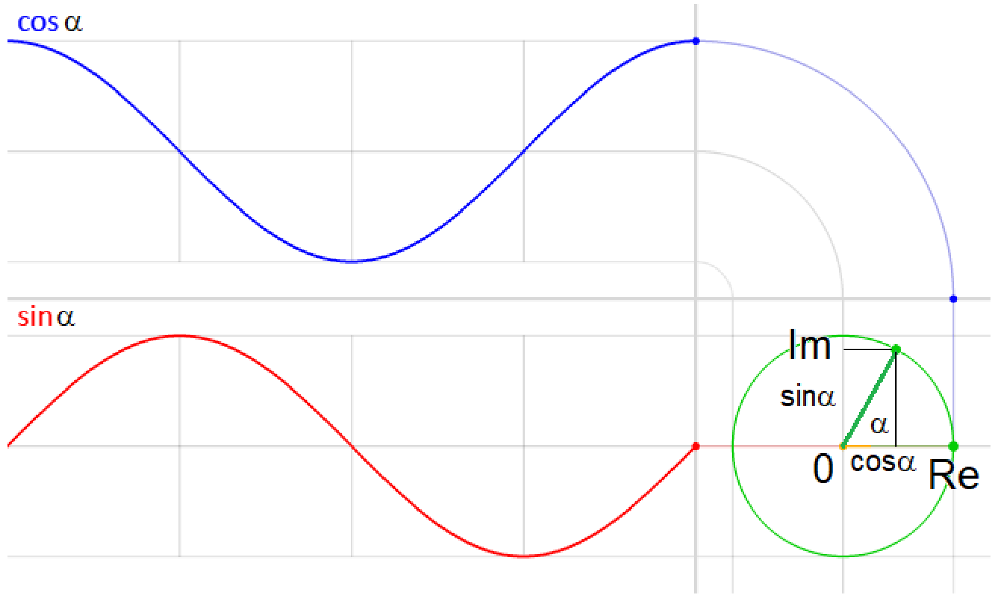
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-A \cdot \sin\phi_0}{A \cdot \cos\phi_0} = -tg\phi_0.$$

$$\phi_0 = -arctg\frac{A_2}{A_1}.$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR



$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(2\pi f\, nT_{vz} + \phi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, nT_{vz}}{NT_{vz}} + \phi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, n}{N} + \phi_0),$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

$$x(nT_{vz}) = A.\exp\left[i(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0)\right].$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x\left[(k+N)T_{vz}\right] = \exp\frac{i2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{i2\pi k}{N}.\exp(i2\pi),$$

když $\exp(i2\pi) = \cos(2\pi) + i.\sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$
$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Eulerovy vztahy

$$x(n) = A.\cos(\alpha(n)) = \mathrm{Re}\{A.e^{i\alpha(n)}\}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$x(n) = \mathit{Re}\{\dot{x}(n)\} = \mathit{Re}\{A.\exp[i(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

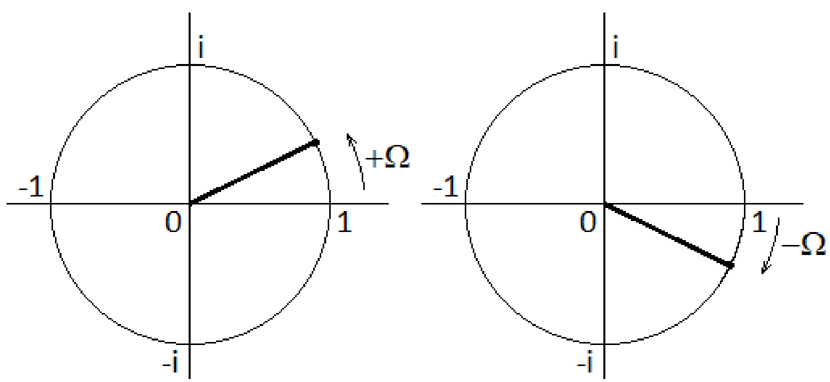
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

kupodivu lze použít i vztah

$$x(n) = \mathit{Re}\{A.\exp[i(-\Omega n T_{vz} - \varphi_0)]\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(n)\}$$

pozor !!! pozor

\- záporný kmitočet - ale funguje to



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

Protože platí

$$x(n) = Re\{\dot{x}(n)\} = Re\{\dot{x}^*(n)\} \text{ a } Im\{\dot{x}(n)\} = -Im\{\dot{x}^*(n)\}$$

je i

$$x(n) = ½.\{\dot{x}(n) + \dot{x}^*(n)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(i\varphi_0).\exp(i\Omega nT_{vz})\} +$$

$$+ ½.\{A\exp(-i\varphi_0).\exp(-i\Omega nT_{vz})\}$$

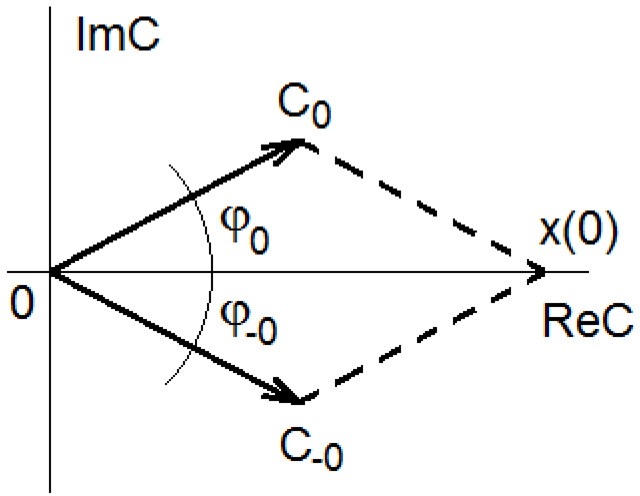
Označíme-li

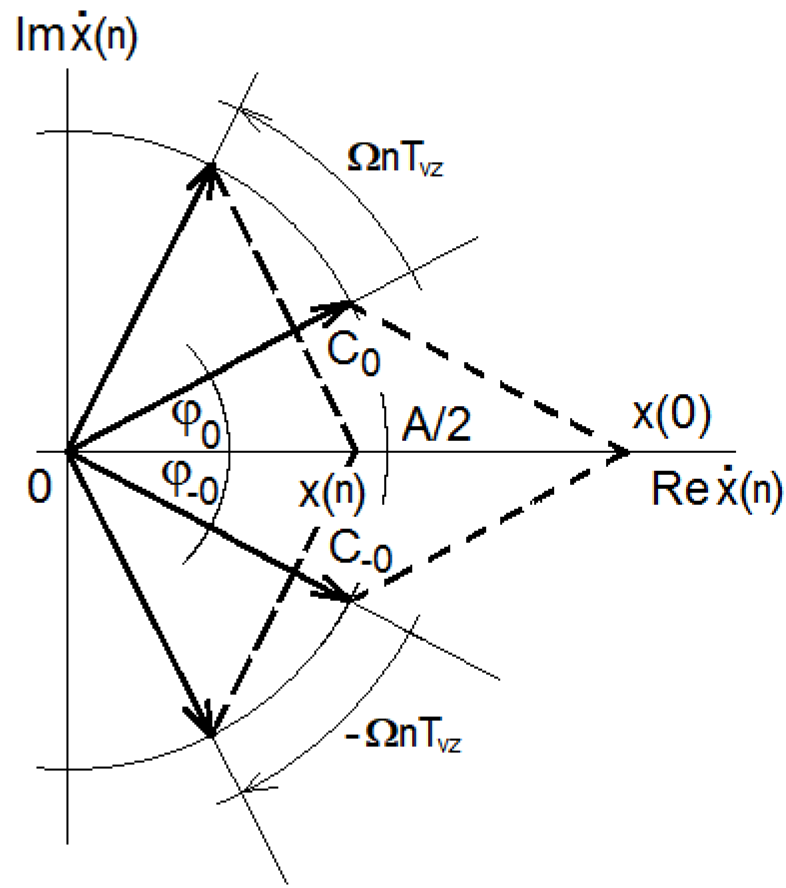
$$\dot{C}_0 = ½.A.\exp(i\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-0} = ½.A\exp(-i\varphi_0)$$

je

$$x(n) = \dot{C}_0.\exp(i\Omega nT_{vz}) + \dot{C}_{-0}.\exp[i(-\Omega)nT_{vz}]$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST





HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

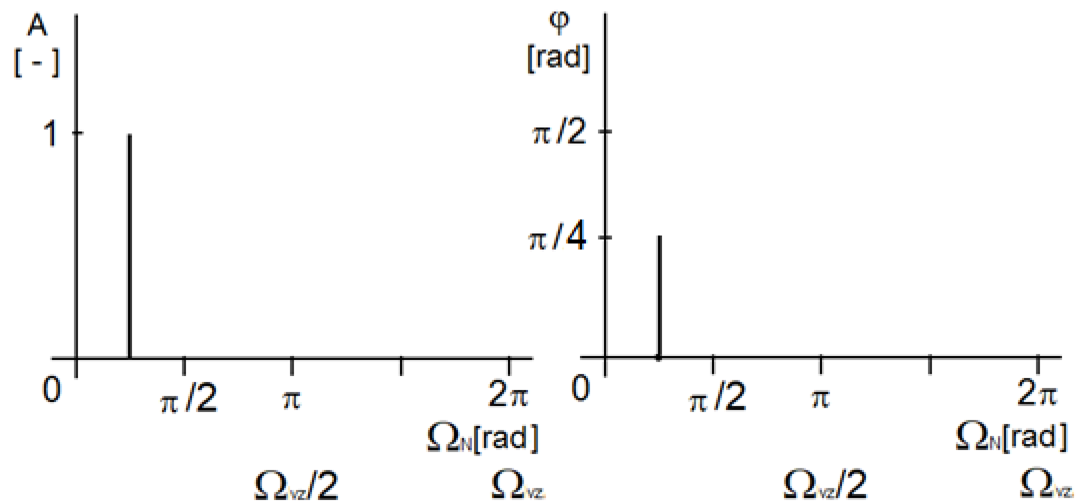
pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

  amplituda x (úhlový) kmitočet a

  počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$

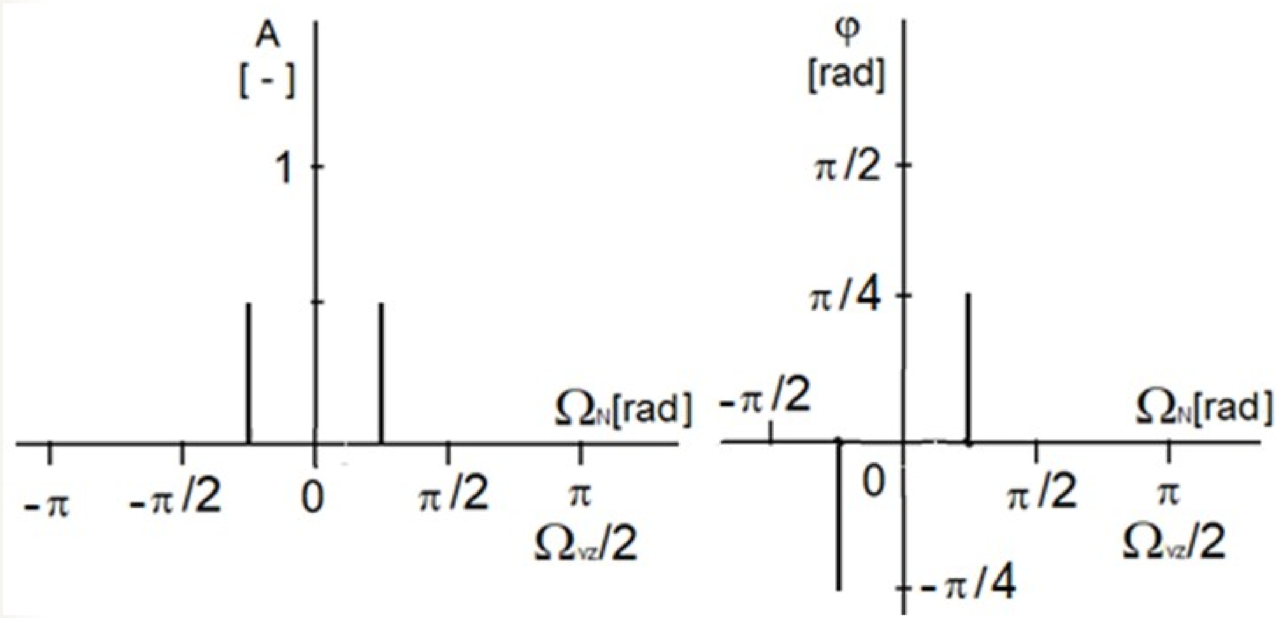


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

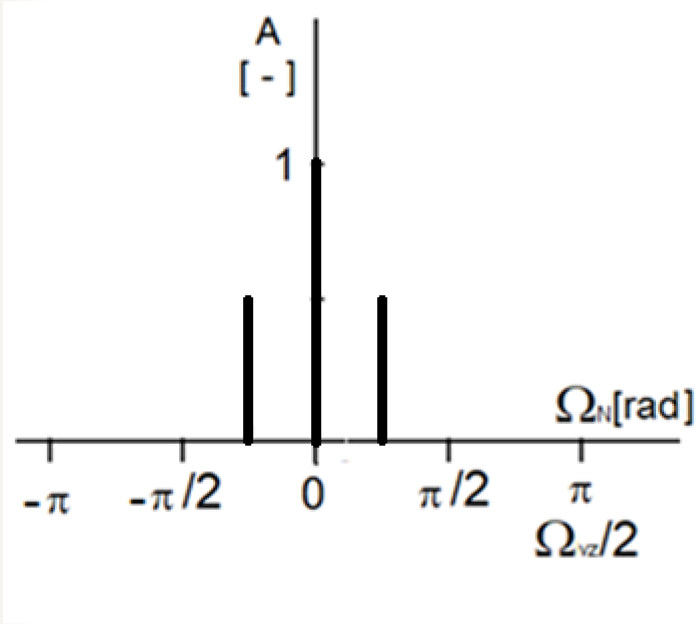


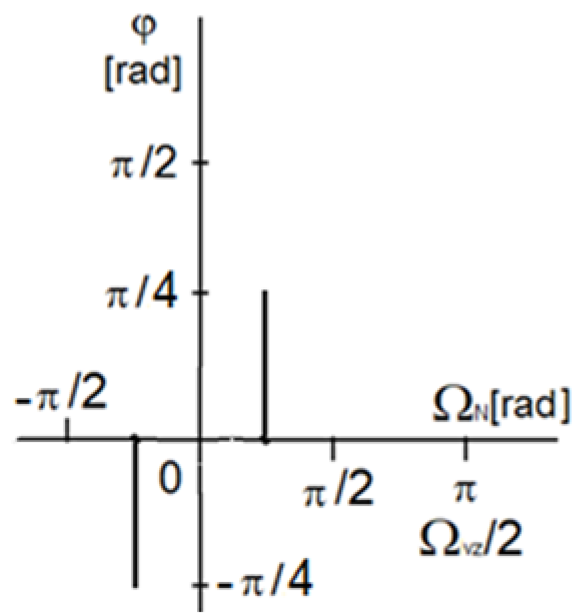
spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$x(nT_{vz}) = 1 + \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



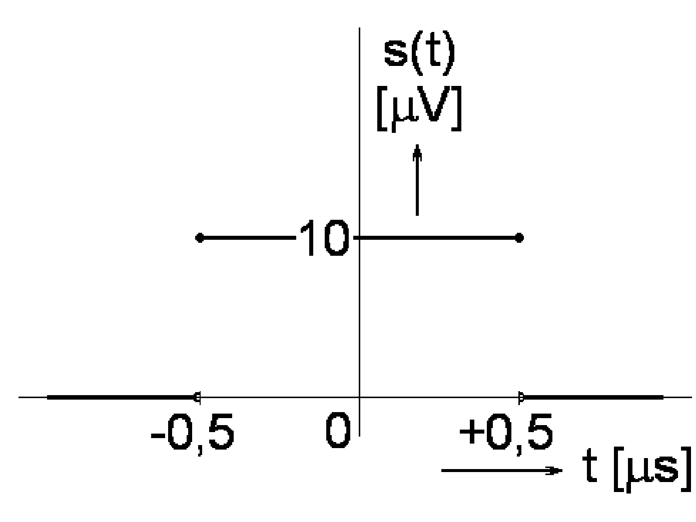


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

- http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html
- http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic
- http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion
- http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

NEPERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

☑ **jednorázová deterministická veličina**



$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s; 0{,}5\ \mu s \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s; \infty \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty; -0{,}5\ \mu s\ )$

- „začíná a končí“

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

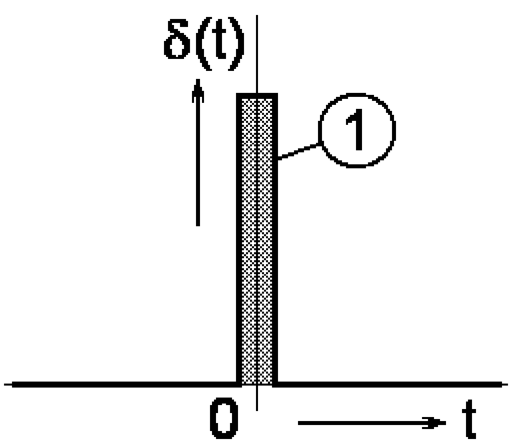
- ☑ diskrétní jednotkový impulz;
- ☑ diskrétní jednotkový skok;
- ☑ diskrétní jednotkový obdélníkový impulz;

JEDNOTKOVÝ IMPULZ

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

  splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice vysoký (limitně nekonečně) obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & pro\ t \neq 0; \\ \infty, & pro\ t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \ .$$

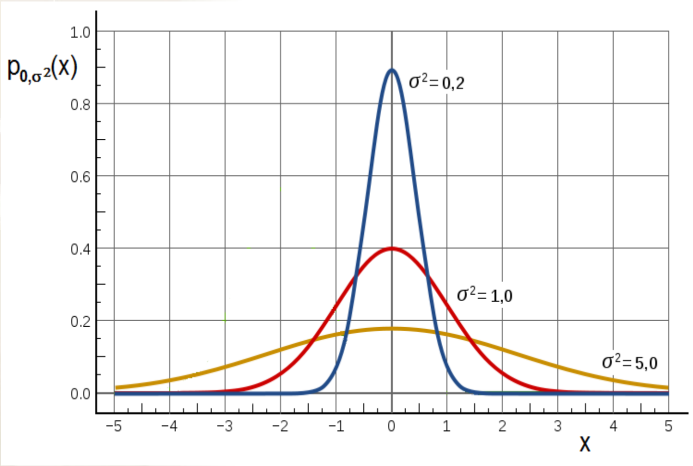
JEDNOTKOVÝ IMPULZ

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

  splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

zjednodušeně:



jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNOTKOVÝ IMPULZ

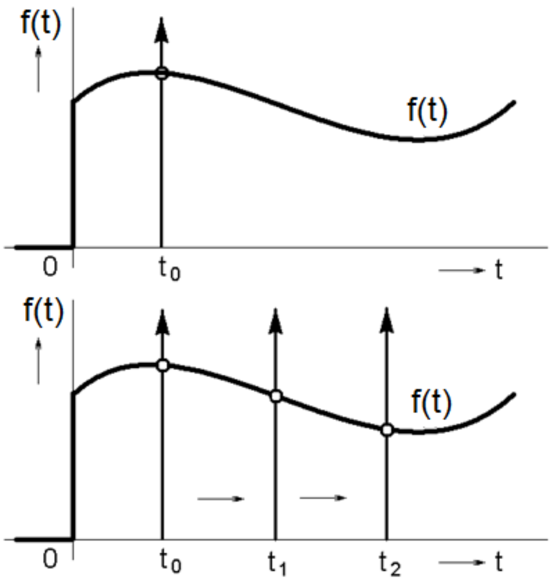
- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$



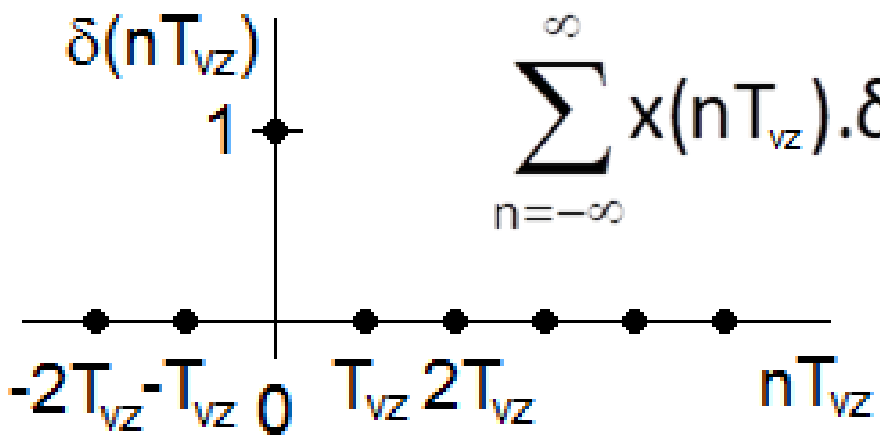
DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ IMPULZ

definice:

$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(nT_{vz}) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\delta(nT_{vz}) = x(0),$$

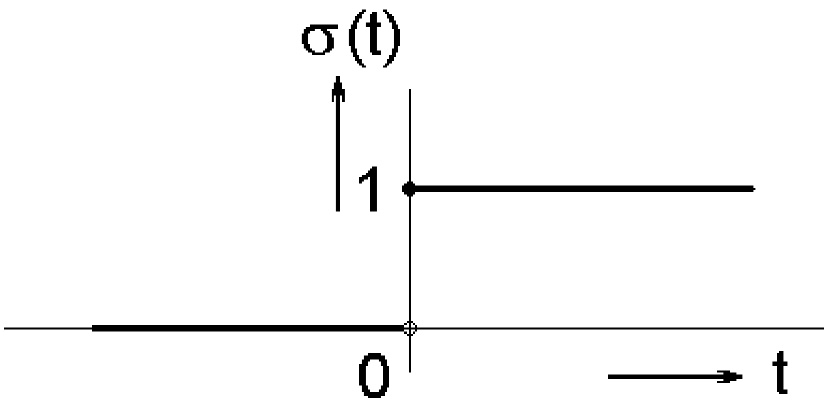


$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = x(mT_{vz})$$

JEDNOTKOVÝ SKOK

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

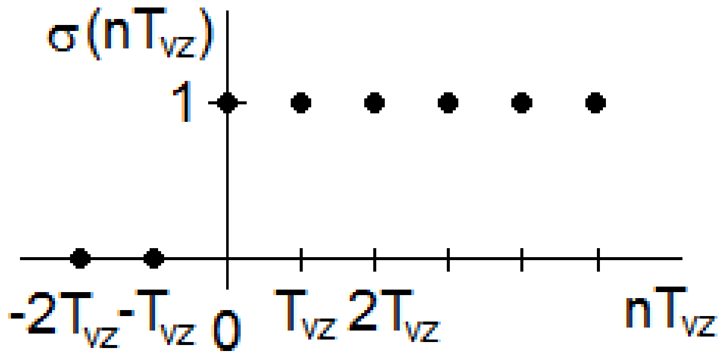
- $$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & pro\ t < 0; \\ 1, & pro\ t \geq 0. \end{cases}$$



DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ SKOK

- definice:

$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$



VZÁJEMNÉ VZTAHY

- pro obě uvedené jednorázové „funkce“ platí:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t) \qquad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

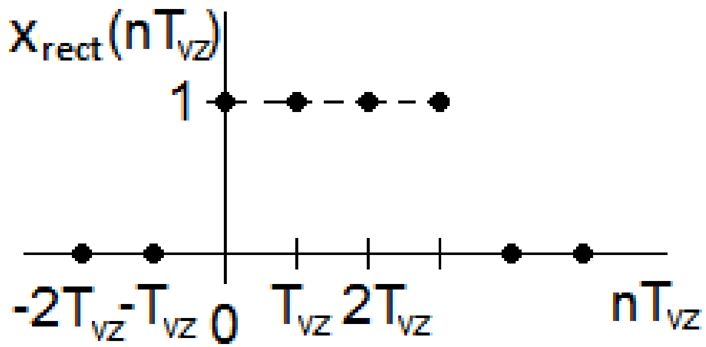
- pro obě uvedené jednorázové posloupnosti platí:

$$\sum_{n=-\infty}^{m} \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz}) \qquad \delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}]$$

DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ OBDÉLNÍKOVÝ IMPULZ

- definice:

$$x_{rect}(nT_{vz}) = x_{rect}(n) = \begin{cases} 1, & n \in \langle 0, M-1 \rangle; \\ 0, & n < 0 \text{ a } n \geq M. \end{cases}$$



$$x_{rect}(nT_{vz}) = x_{rect}(n) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-M)T_{vz}]$$

VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY ČASOVÝCH ŘAD

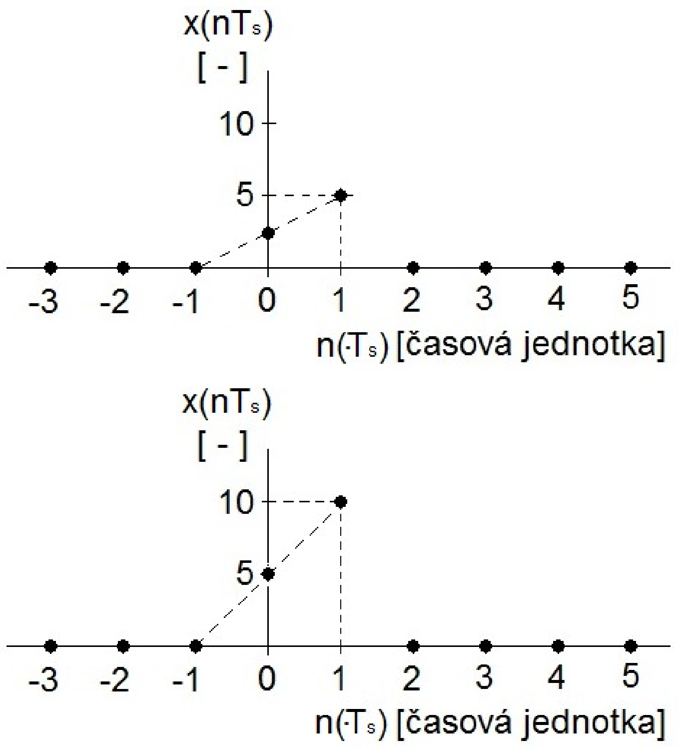
OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- ☑ **násobení konstantou**

  $$x(n) \sim A \cdot x(n),$$



A=2

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **změna časového měřítka**

$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **změna časového měřítka**

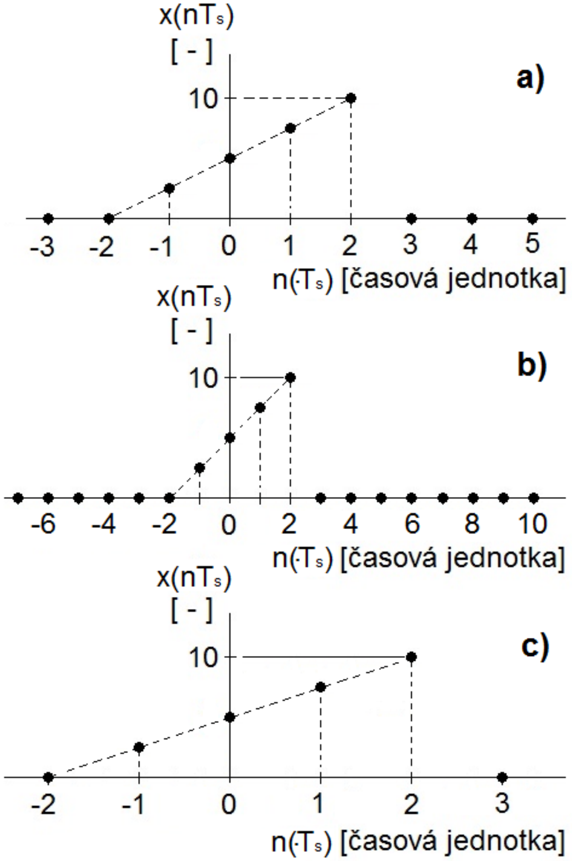
$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde m je kladné reálné číslo

m > 1 – časová komprese;

m < 1 – časová expanze

m = 1 – nic se neděje



OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

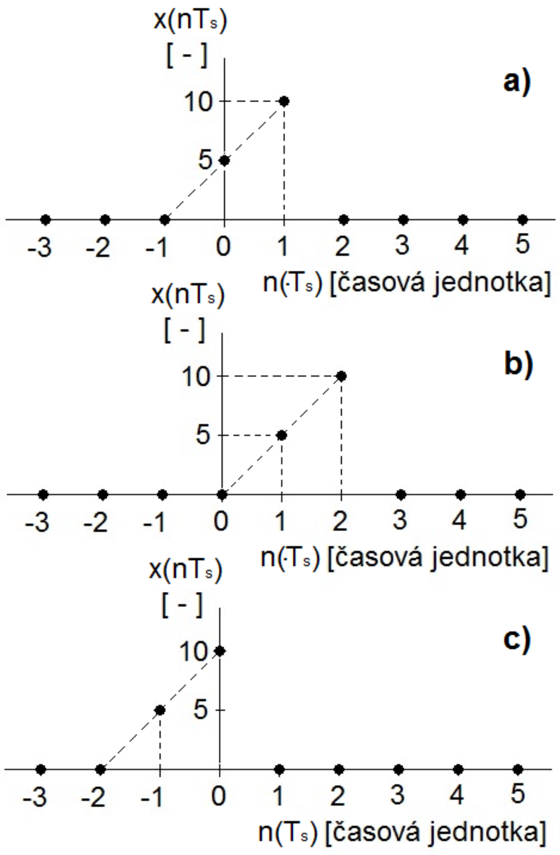
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

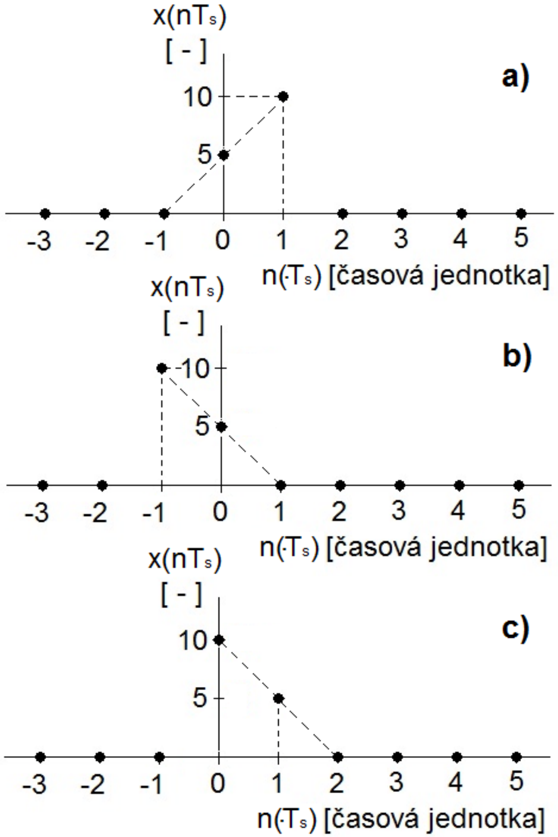


a) originál x(n); b) funkce x(n-1); c) funkce x(n+1);

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$x(n) \sim x(-n) \,,$$



a) originál x(n); b) funkce x(-n); c) funkce x(-n+1)

SHRNUTÍ

- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impulz, periodická posloupnost);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické posloupnosti;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní unární operace s posloupnostmi.

OPERACE SE DVĚMA POSLOUPNOSTMI
(BINÁRNÍ OPERACE)

KONVOLUCE

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi $x_1(t)$ a $x_2(t)$ téhož argumentu definovaný (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau,$$

kde funkce $x_2(t)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma posloupnostmi $x_1(n)$ a $x_2(n)$ téhož argumentu definovaná součtovým vztahem

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

kde posloupnost $x_2(n)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

- ☑ **komutativní zákon**

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n);$$

- ☑ **distributivní zákon**

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n);$$

- ☑ **asociativní zákon**

$$x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n).$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ zákon o posunu v čase

Je-li $x_1(n) * x_2(n) = c(n)$,

pak

$$x_1(n) * x_2(n-m) = c(n-m),$$
$$x_1(n-m) * x_2(n) = c(n-m)$$

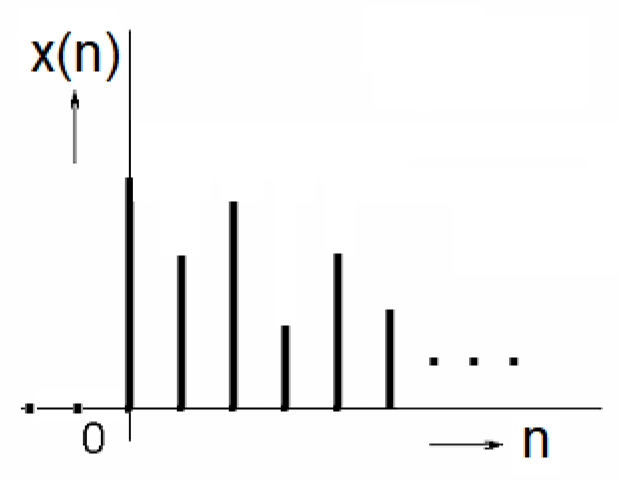
a

$$x_1(n-m_1) * x_2(n-m_2) = c(n-m_1-m_2).$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI
KAUZALITA

Kauzální je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupní veličiny x(t) pro $t \leq t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupní veličiny. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme ***nekauzální***, příp. ***anticipativní***.

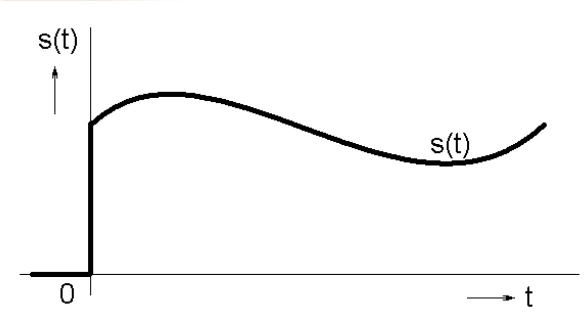
Zprostředkovaně:
jako kauzální označujeme takové posloupnosti, pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$.

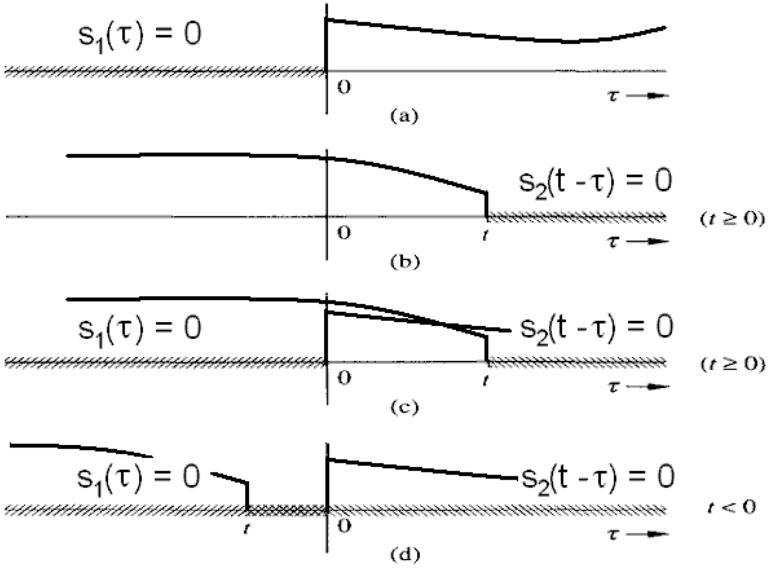


KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI
KAUZALITA

Konvoluce kauzálních funkcí:

Pro kauzální funkce platí s(t) = 0 pro t < 0





$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) \, . \, s_2(t-\tau) \, . \, d\tau$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

- pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí x(n) = 0 pro n < 0 se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m).x_2(n-m).$$

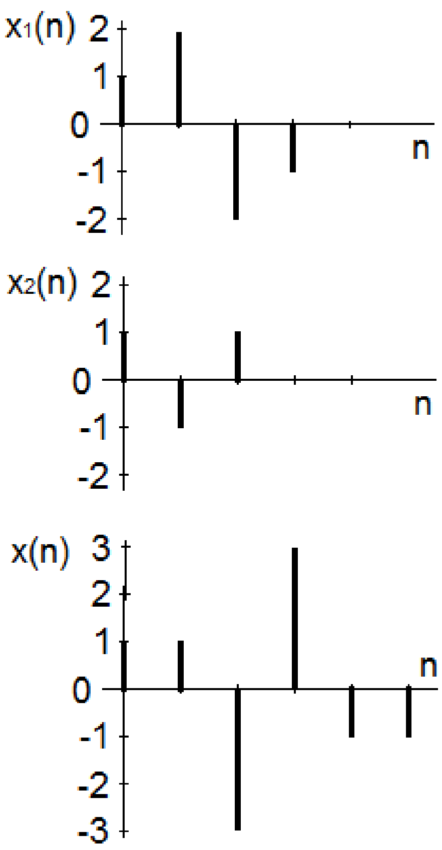
- V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$
$$= \sum_{m=0}^{\min(N_1-1, N_2-1)} x_1(m).x_2(n-m).$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ šířková vlastnost konvoluce

Pokud jsou doby trvání (šířky, tj. počty vzorků posloupností, jejichž hodnoty jsou různé od nuly) posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$ konečné, např. N_1 v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 pro $x_2(n)$ je počet vzorků výsledné konvoluční posloupnosti obou funkcí rovna N_1+N_2-1.



KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ konvoluce posloupnosti s jednotkovým impulzem

Výsledkem konvoluce posloupnosti x(n) s jednotkovým impulzem je posloupnost x(n).

Z definice konvoluce vyplývá, že

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m).\delta(n-m)$$

Protože δ(n-m) reprezentuje jednotkový impulz posunutý oproti počátku o n vzorků, je suma ve výše uvedeném vztahu průběžně rovna hodnotě x(n). Proto

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$x_1(m)$	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
$x_2(m)$	x_{20}	x_{21}	x_{22}			

$x_1(m)$				x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
			Σ	$\times$					
$x_2(-m)$	x_{22}	x_{21}	x_{20}						

$x_1(m)$		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	Σ	$\times$	$\times$	$\times$			
$x_2(2-m)$		x_{22}	x_{21}	x_{20}			

DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

$$x_2(m) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ \hline \end{array}$$

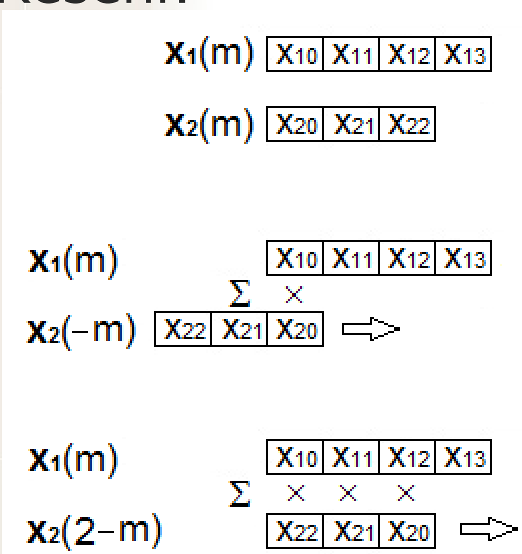
$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \\ x_2(-m) \end{array} \qquad \sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} \\ \hline x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \\ x_2(2-m) \end{array} \qquad \sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} & \multicolumn{1}{c}{\times} \\ \hline x_{22} & x_{21} & x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23} \\ \hline \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 1

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ ..

Řešení:



		1	2	-2	-1			
		1	-1	1				
		1	2	-2	-1			1
1	-1	1						
		1	2	-2	-1			1
	1	-1	1					
		1	2	-2	-1			-3
		1	-1	1				
		1	2	-2	-1			3
			1	-1	1			
		1	2	-2	-1			-1
				1	-1	1		
		1	2	-2	-1			-1
					1	-1	1	

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 2

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ ..

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$\{x_{10}, x_{11}, \dots x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} =$

$$
\begin{array}{l}
= (x_{10}.\ x_{20})(x_{10}.\ x_{21})(x_{10}.\ x_{22}) \\
\qquad\qquad\qquad (x_{11}.\ x_{20})(x_{11}.\ x_{21})(x_{11}.\ x_{22}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_{12}.\ x_{20})(x_{12}.\ x_{21})(x_{12}.\ x_{22}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_{13}.\ x_{20})(x_{13}.\ x_{21})(x_{13}.\ x_{22}) \\
\hline
\end{array}
$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 2

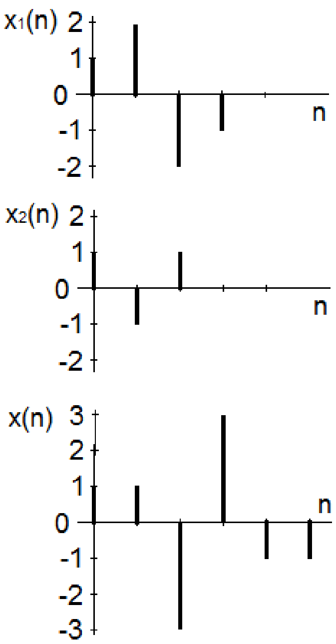
Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$\{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} =$

=	1	-1	1			
		2	-2	2		
			-2	2	-2	
				-1	1	-1
	1	1	-3	3	-1	-1



DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 3

Vypočtěte konvoluci posloupností x_1 = {1, 2, -2, -1} a $x_2(n)$ = {1, -1, 1}

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[a \quad b \quad c \quad d] * [e \quad f \quad g] = [a \quad b \quad c \quad d] \begin{bmatrix} e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & f & g \end{bmatrix}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 3

- Vypočtěte konvoluci posloupností x_1 = {1, 2, -2, -1} a $x_2(n)$ = {1, -1, 1}

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[1,2,-2,-1]*[1,-1,1]=[1,2,-2,-1].\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

= [1, 1,-3, 3, -1, -1]

ZA TÝDEN NASHLEDANOU