ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

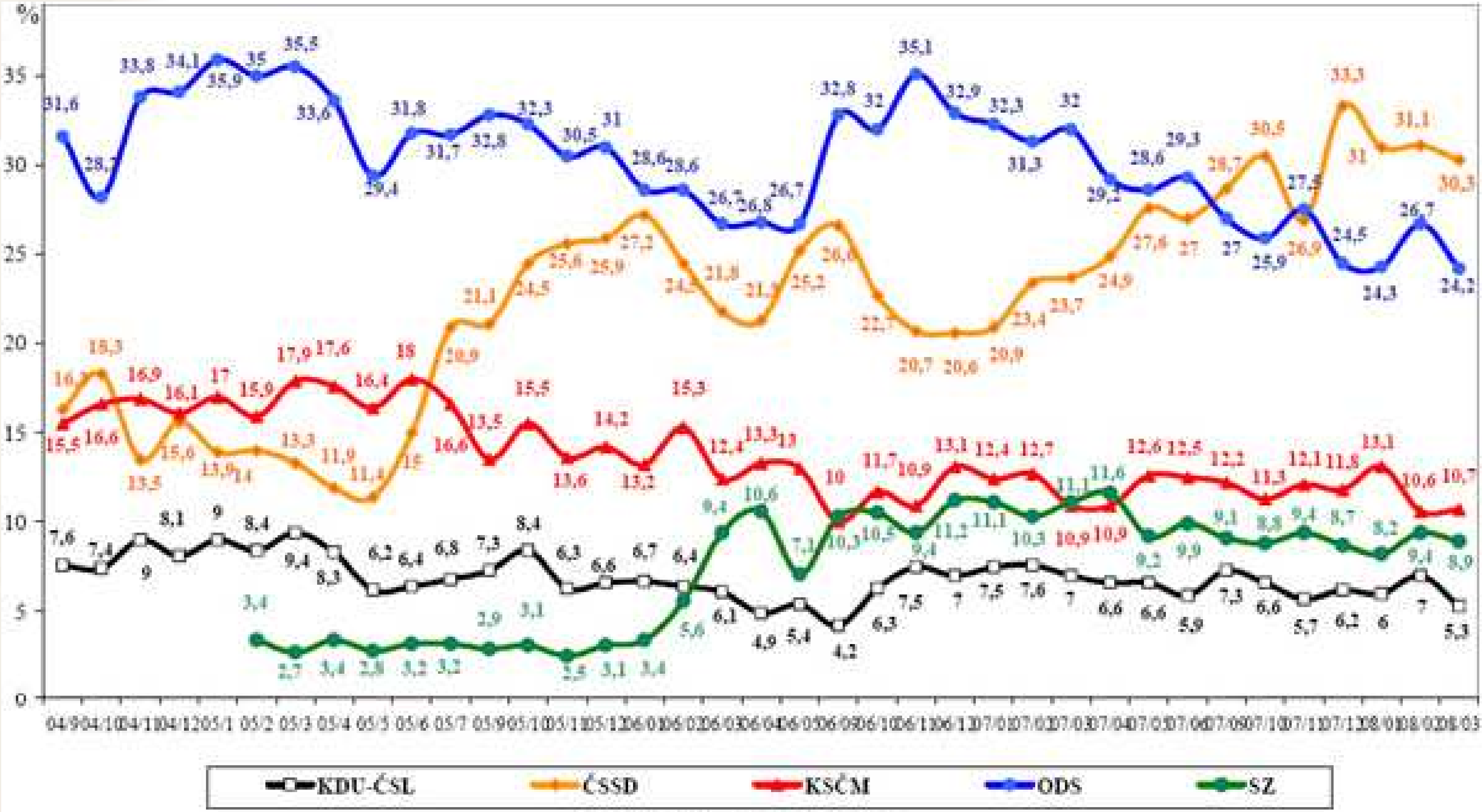
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123

kalina@mail.muni.cz

VII. HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

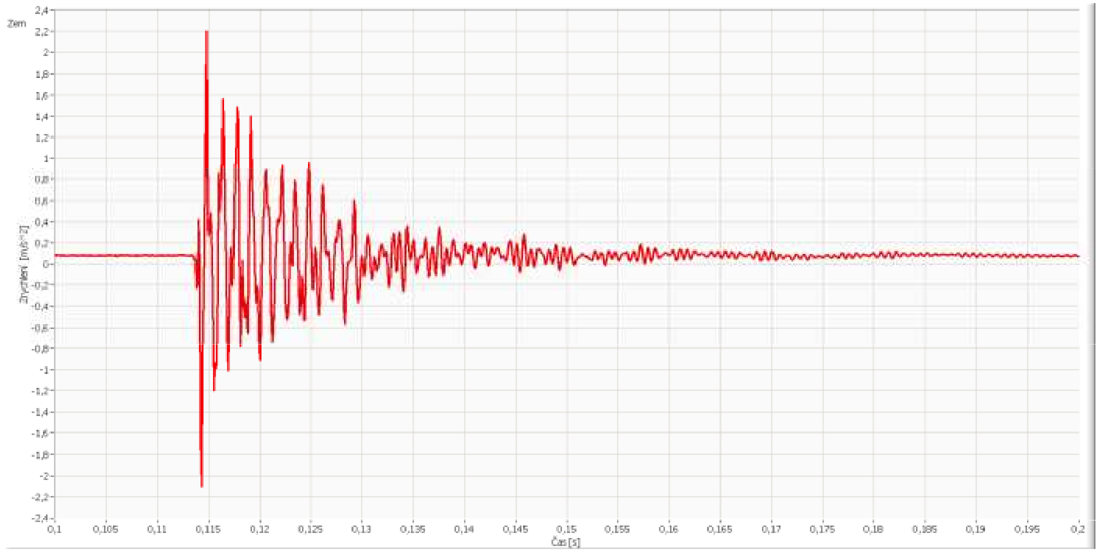
ČASOVÁ ŘADA

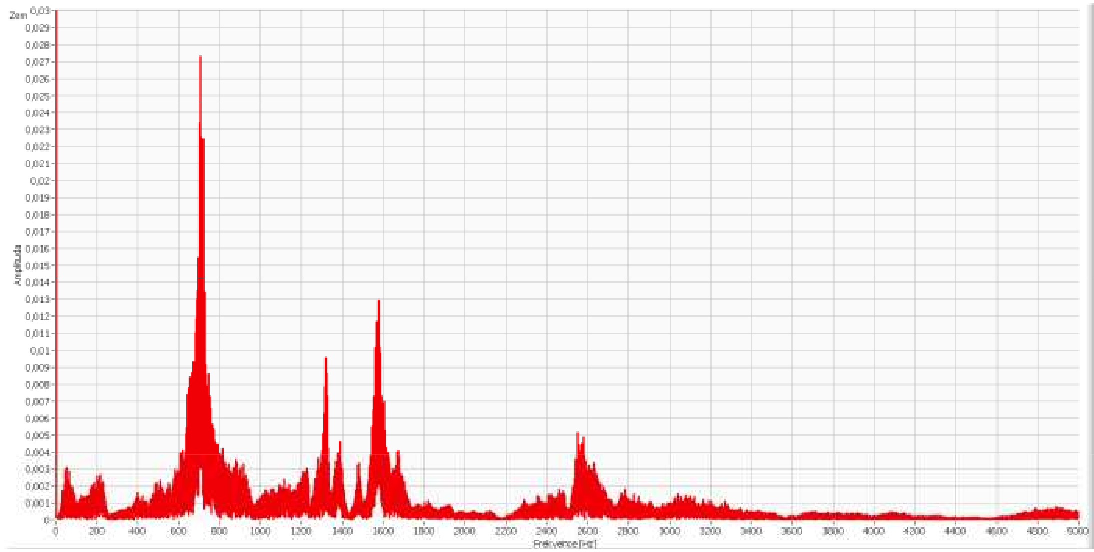


Zdroj: STEM, Trendy 2004/9 - 2008/03

Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

OSCILACE

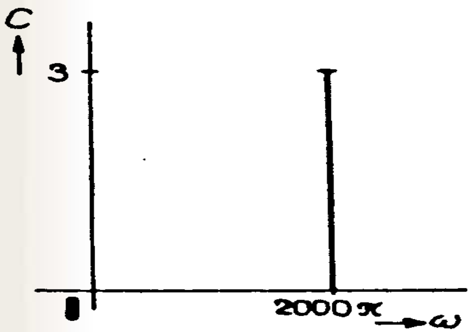




HARMONICKÁ FUNKCE

- ☑ tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách amplituda x úhlový kmitočet a počáteční fáze x úhlový kmitočet:

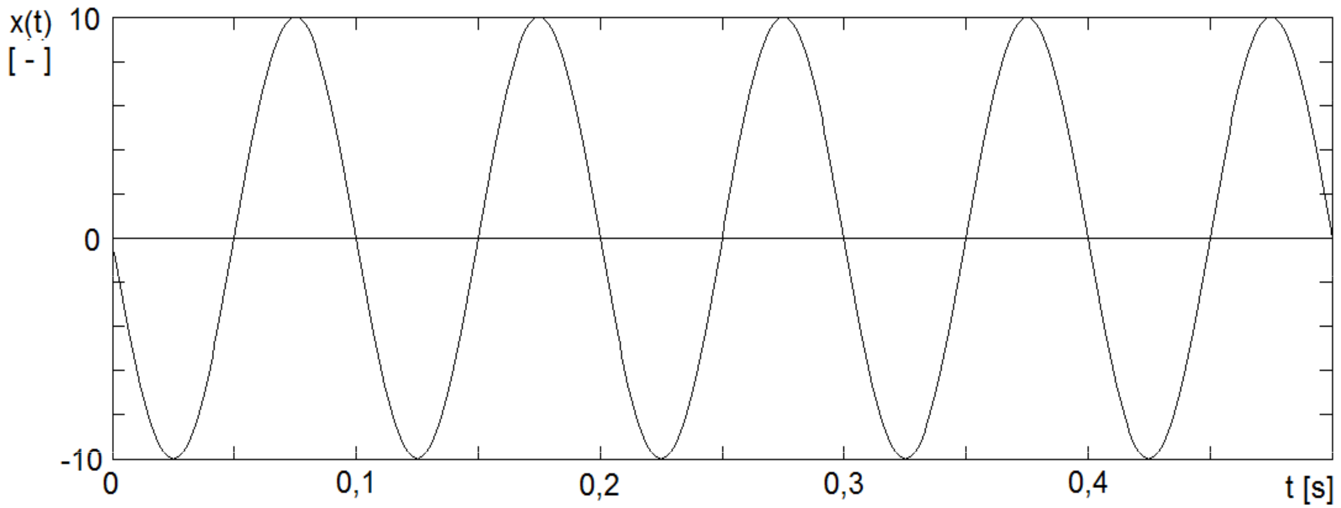
$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$

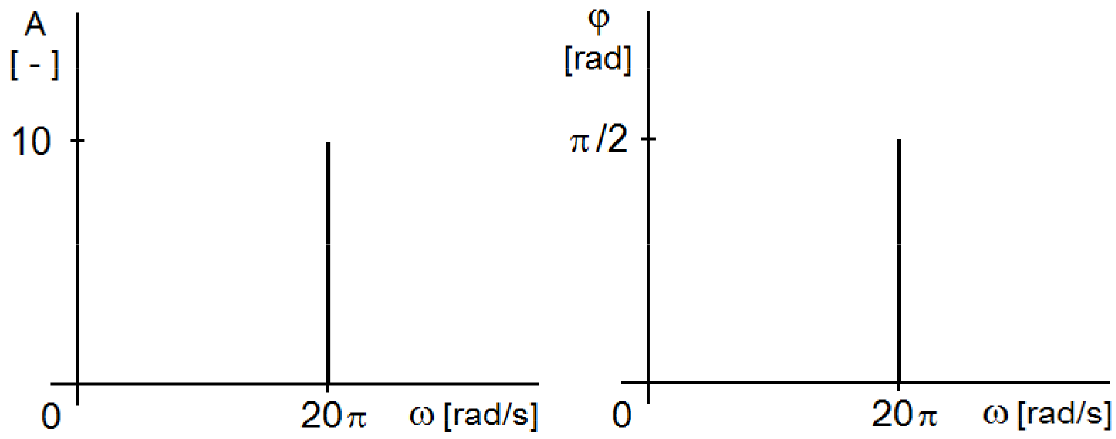


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ FUNKCE

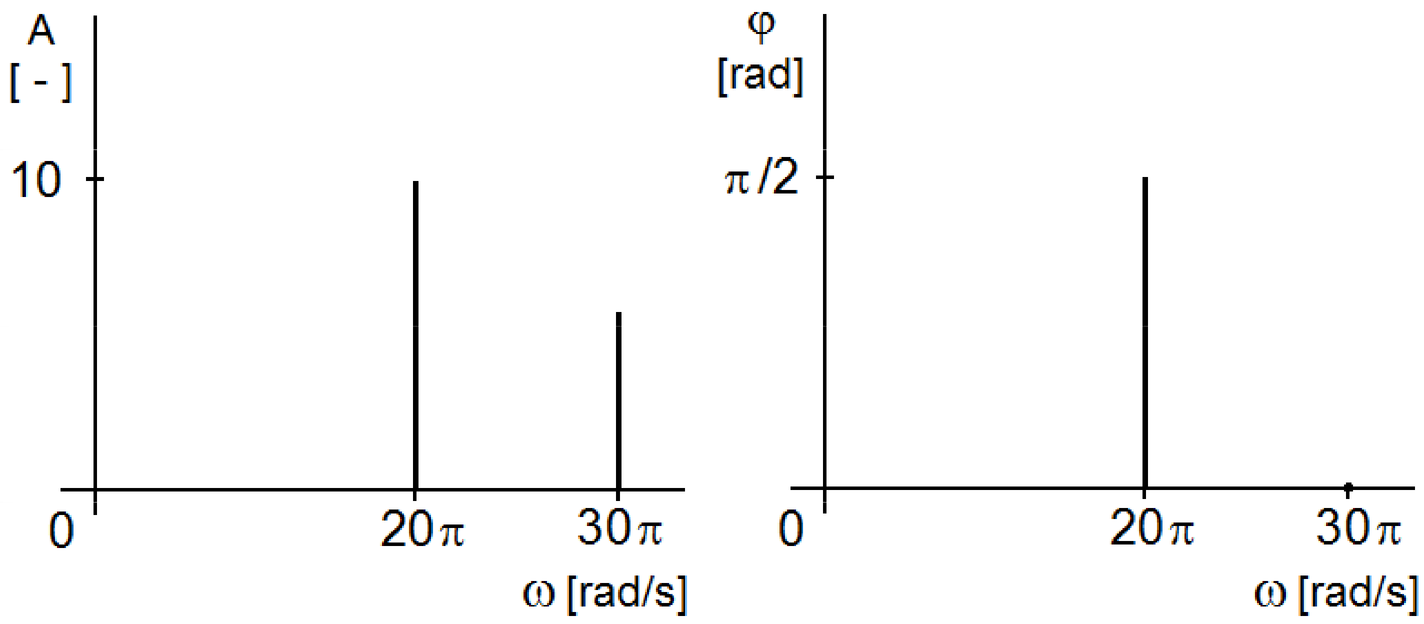
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$



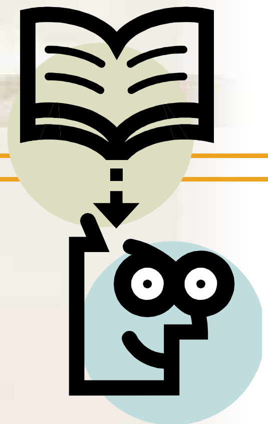


HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2) + 5.\cos(2\pi.15t)$$



!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



Frekvenční spektrum funkce je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se funkce skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce f(x) má v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu n+1 včetně

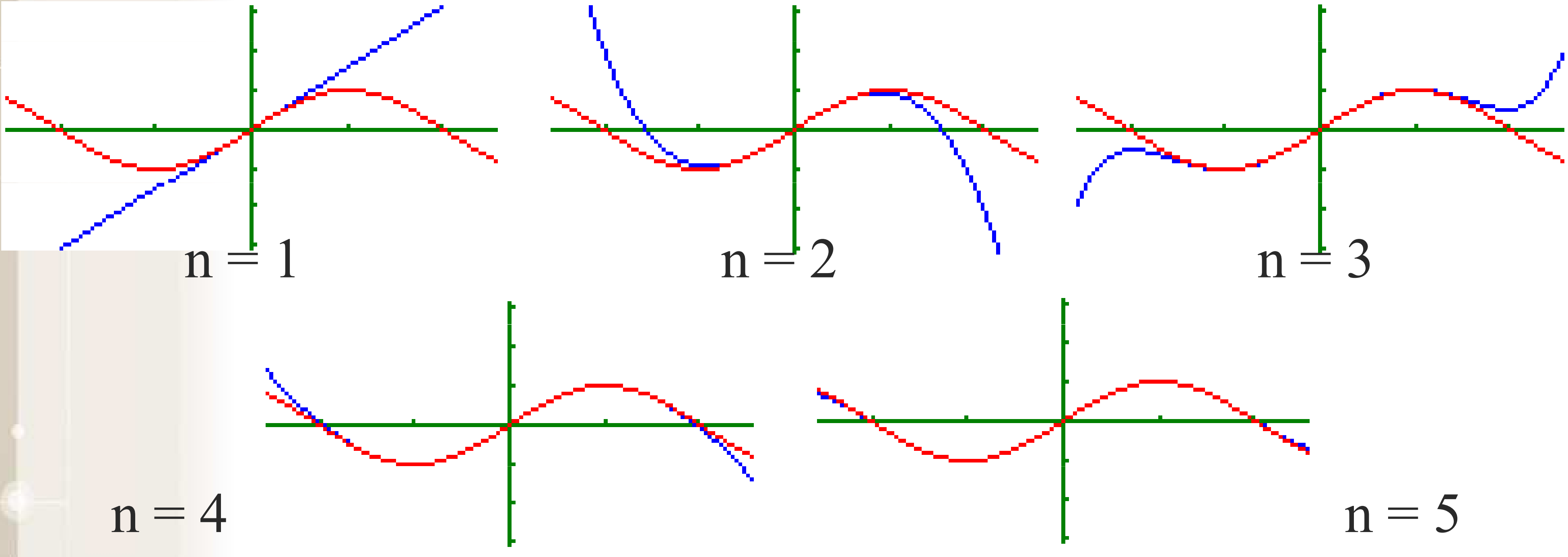
Taylorova řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

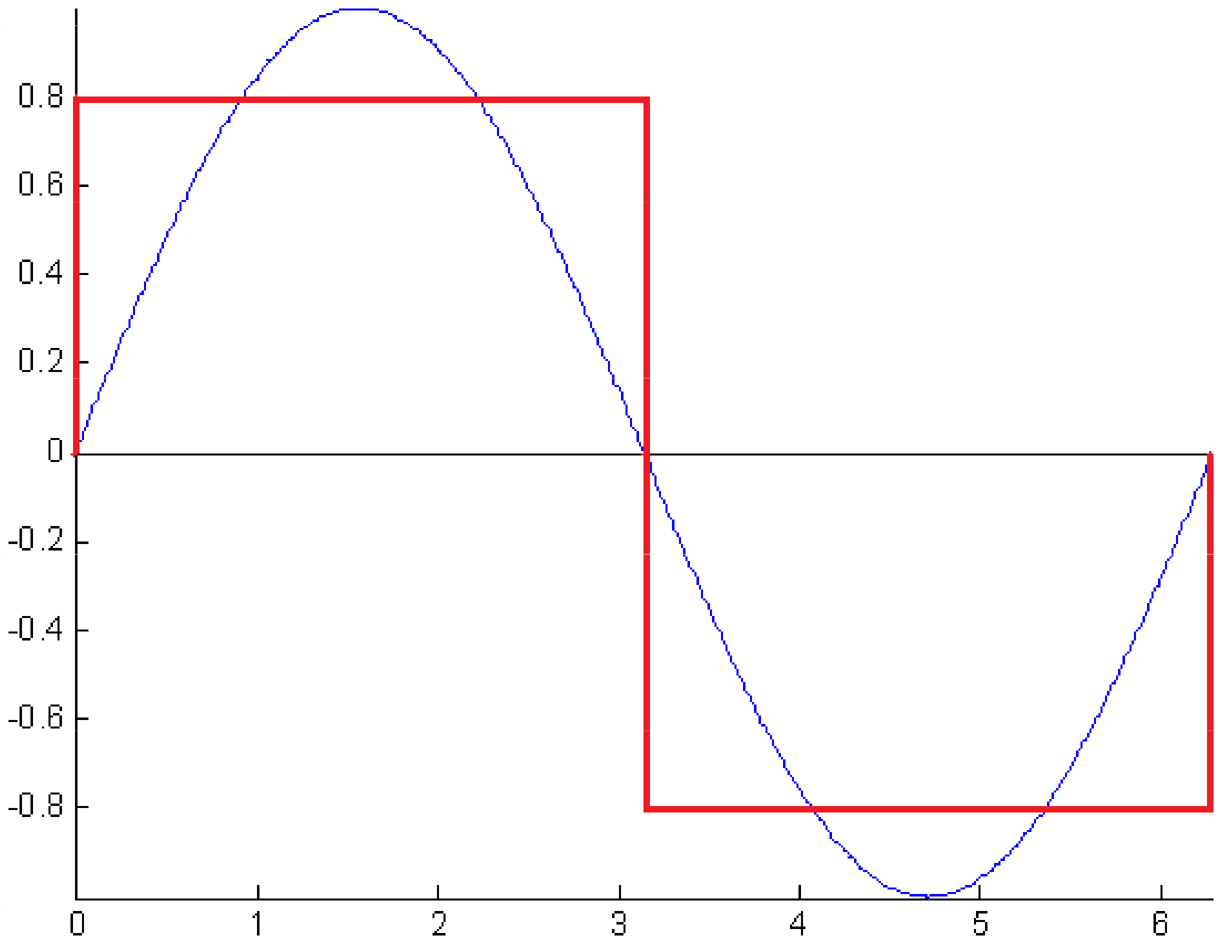
TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE y = sin(x) PRO x = 0

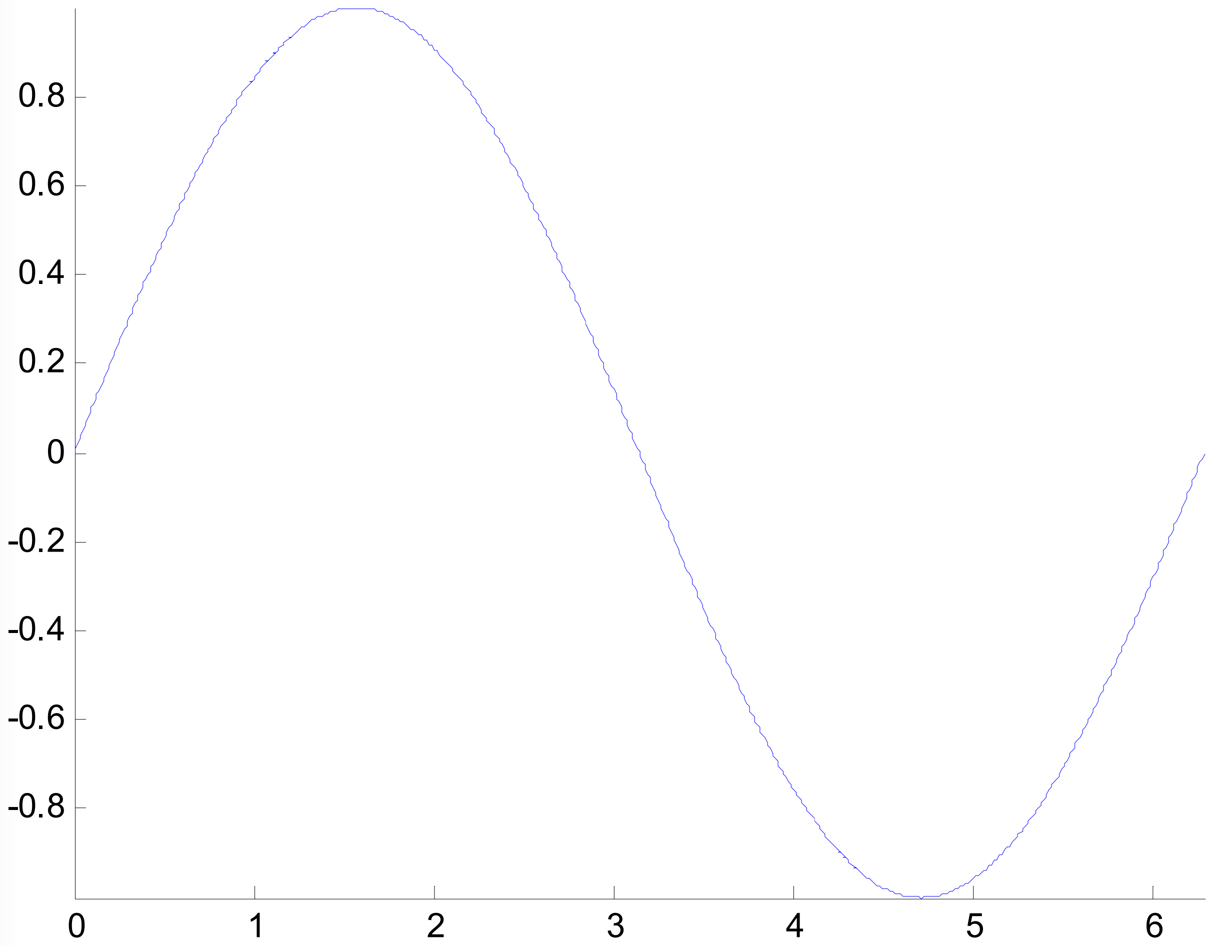


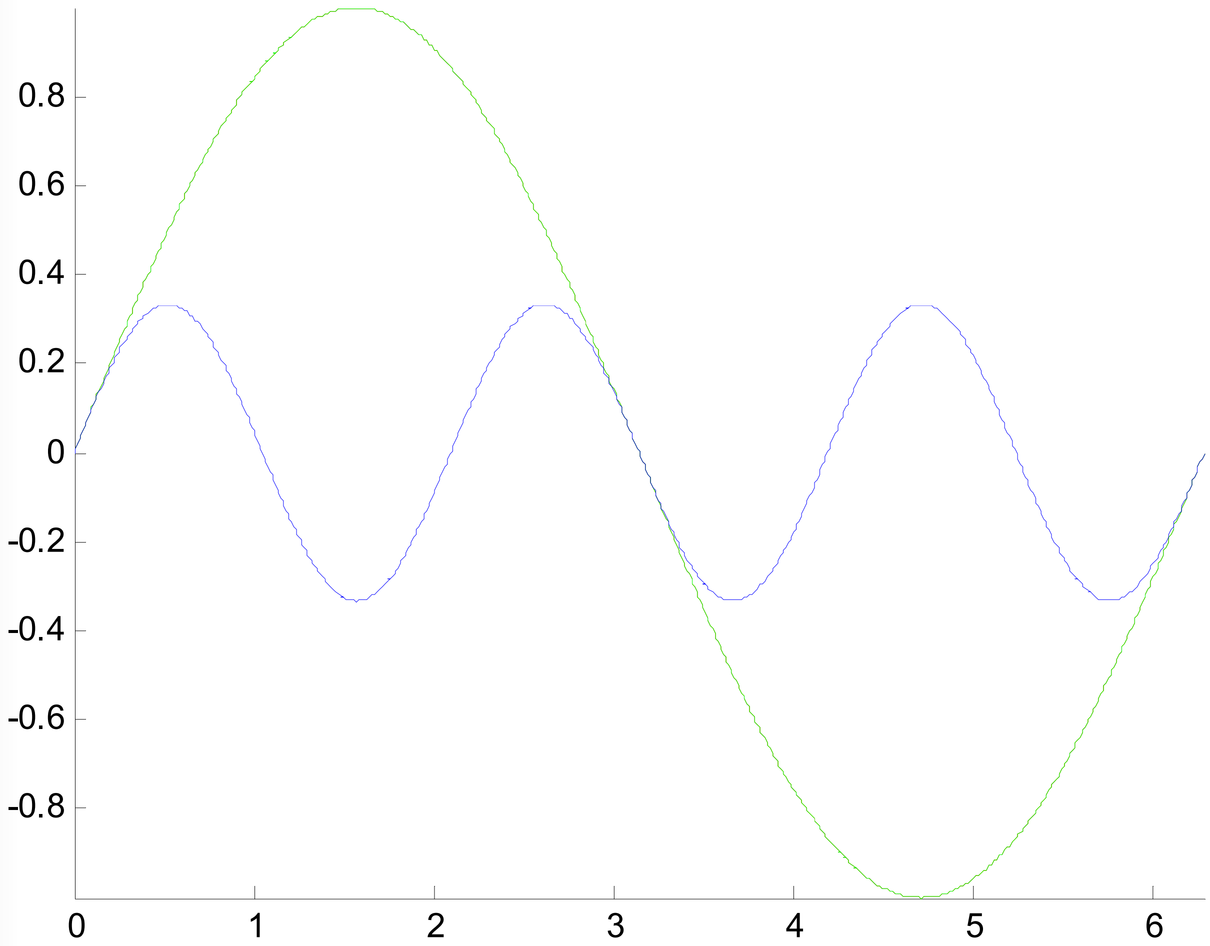
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

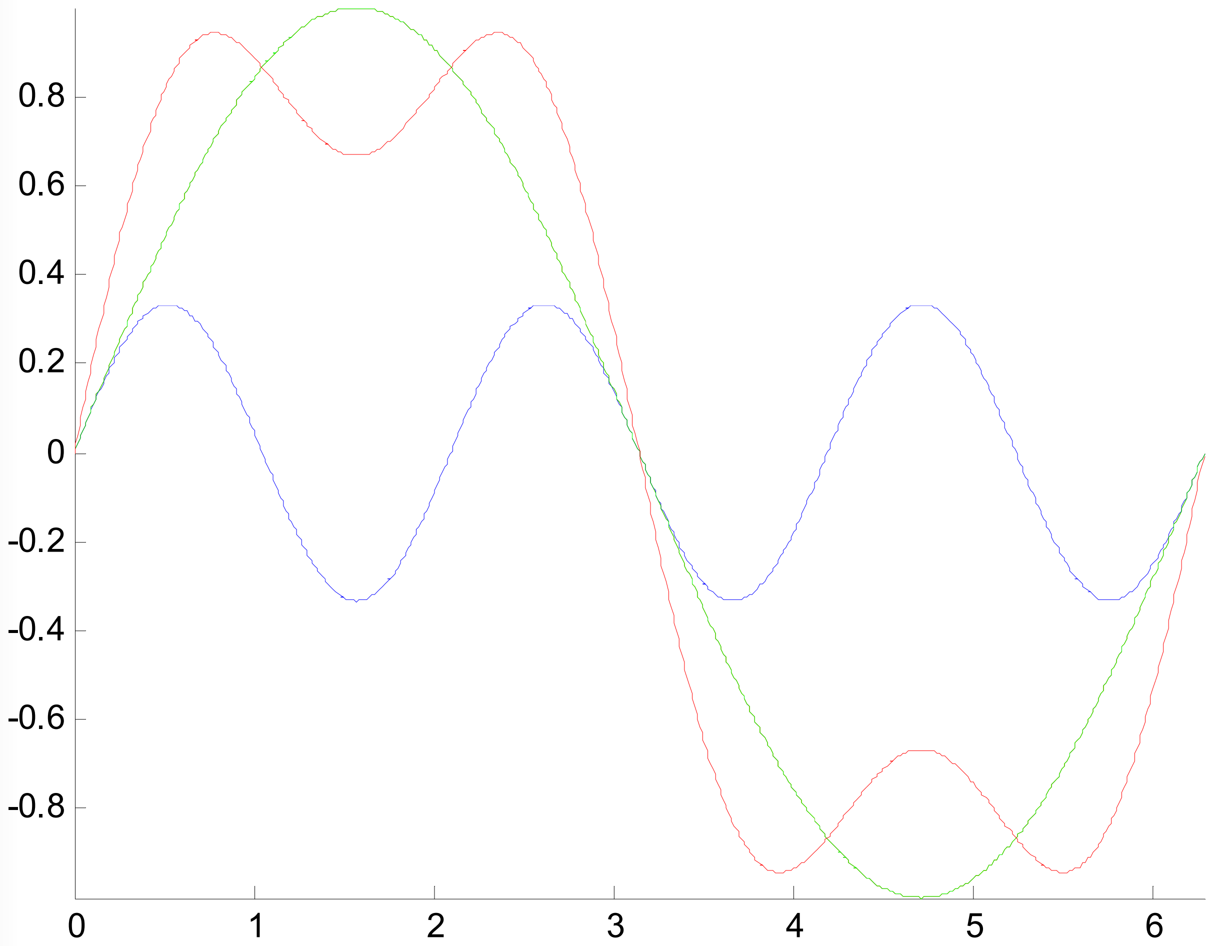
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

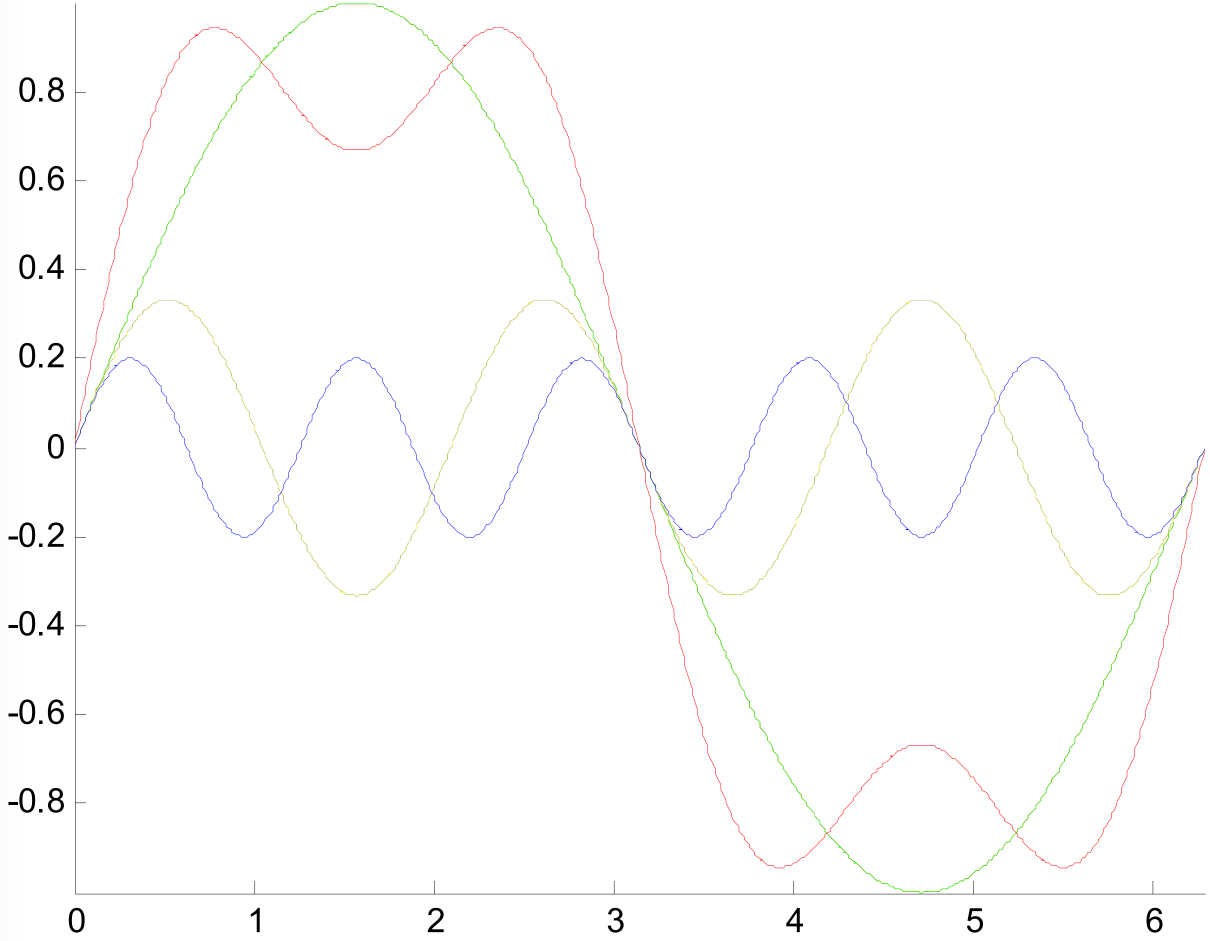
- poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako mocninou řadu;
- jinou možností je vyjádřit funkci jako harmonickou (trigonometrickou) řadu (tj. jako součet harmonických funkcí);
- takto lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

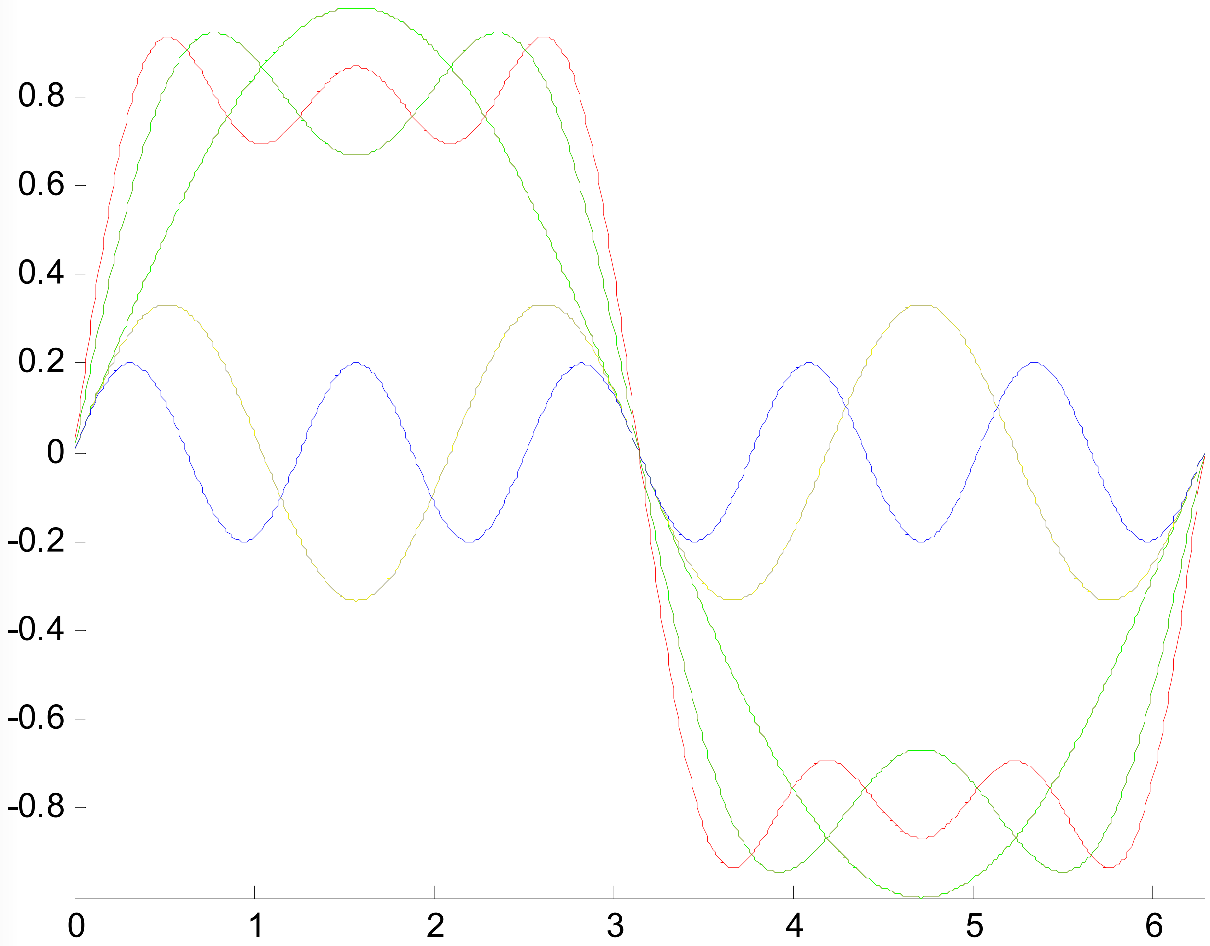

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

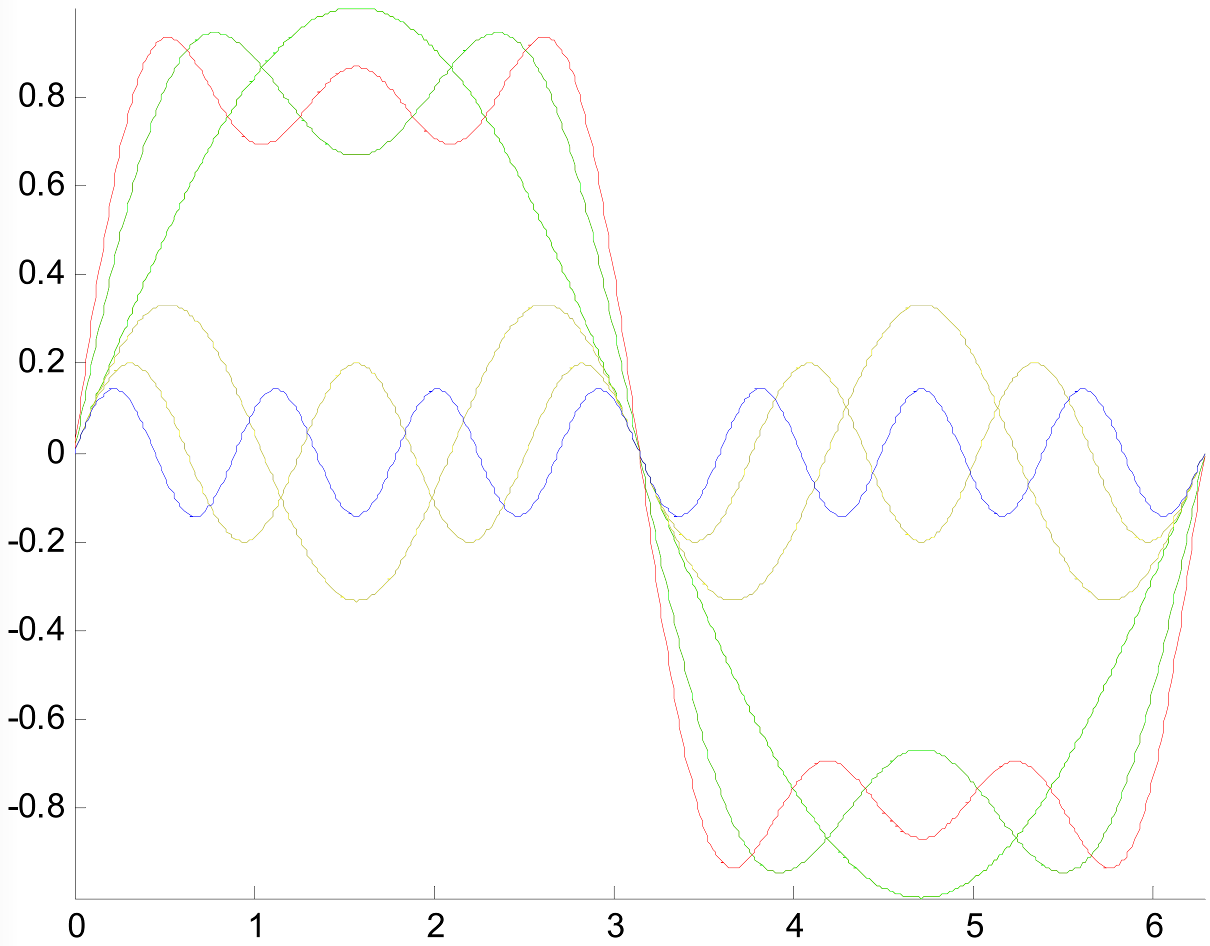

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

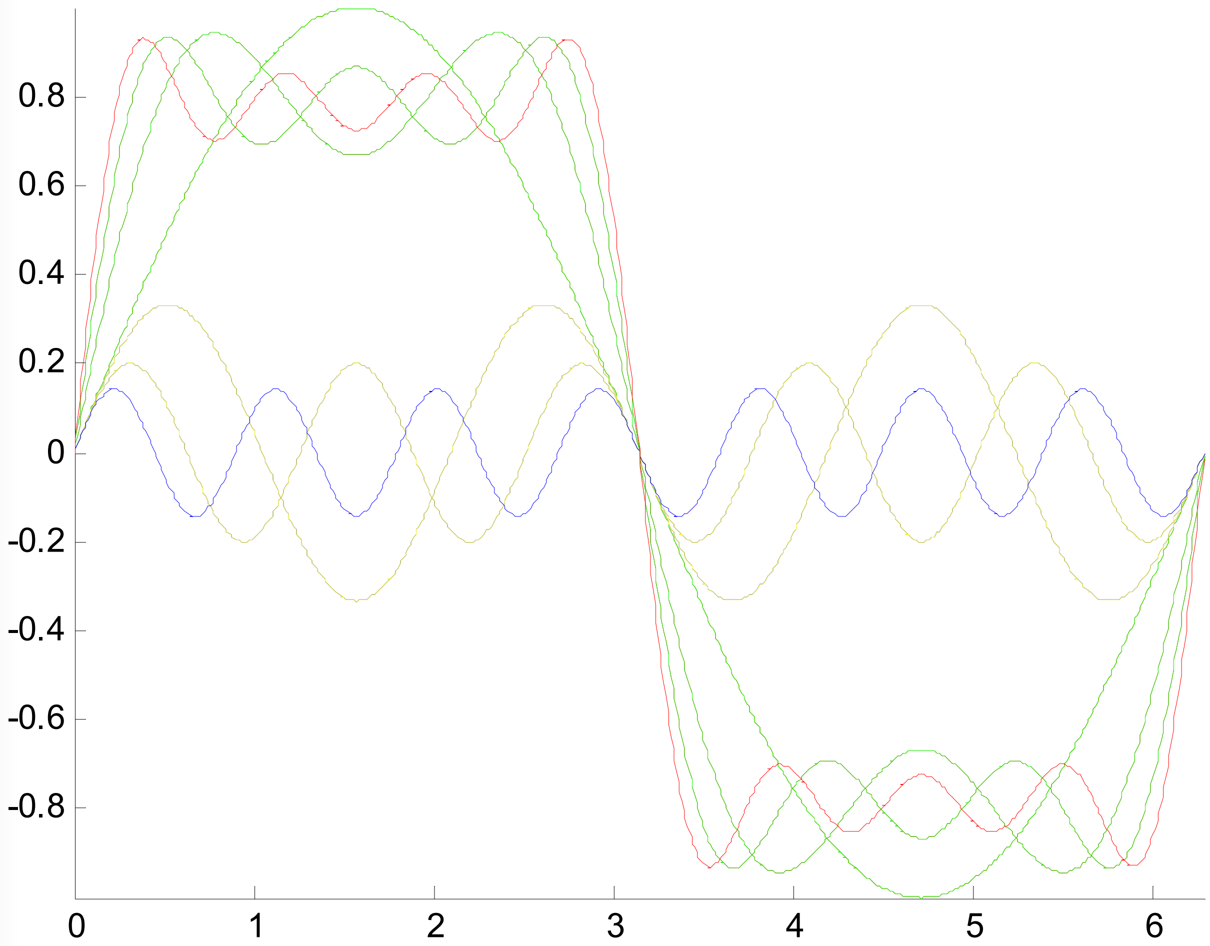

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

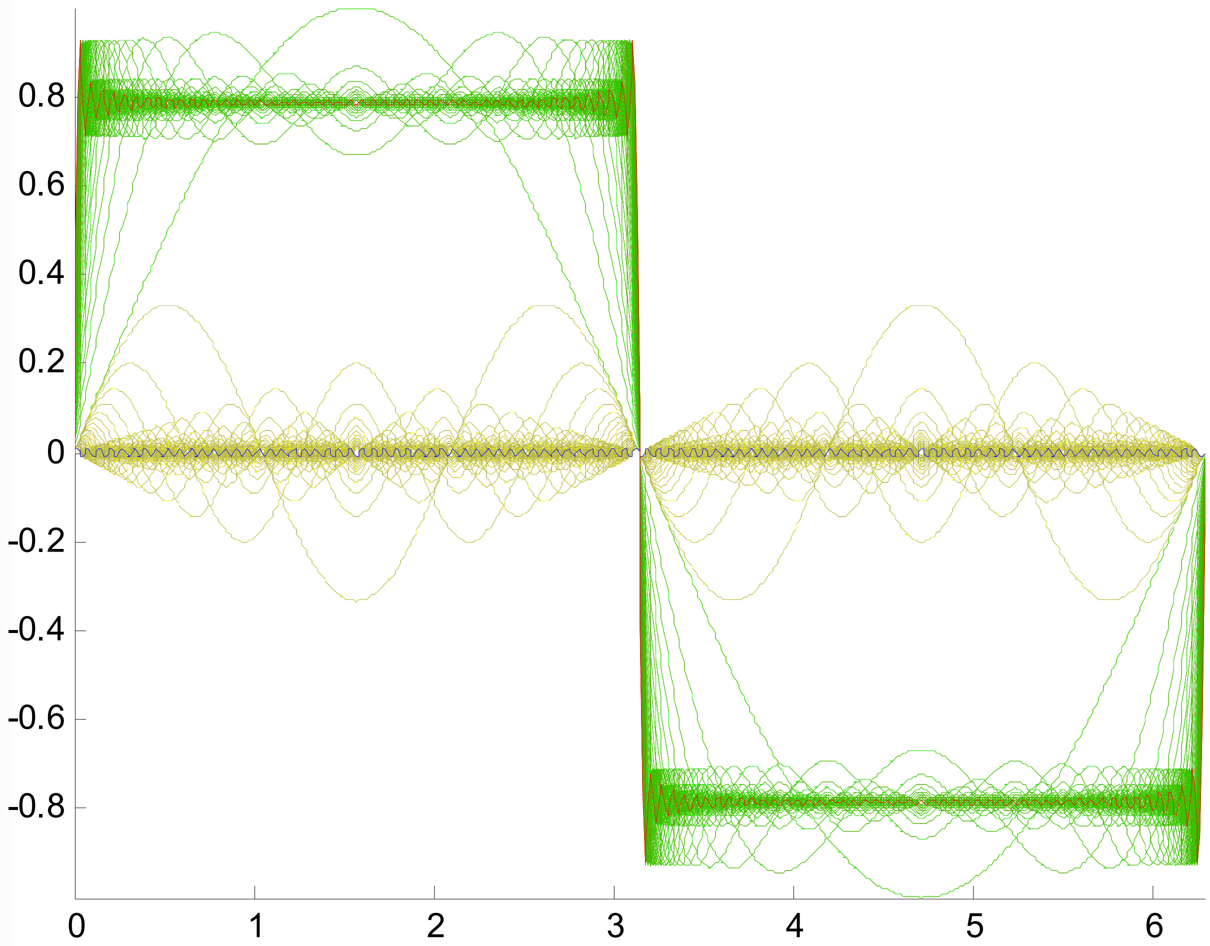


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) funkci jako součet jednoduchých funkcí (harmonických funkcí, složek).
- počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny jednoznačně charakterizují analyzovanou funkci.
- Fourierova řada
- Fourierův integrál, Fourierova transformace
- Fourierovy řady mohou být vyjádřeny buď v klasickém, trigonometrickém nebo komplexním tvaru.
- zpracovávat můžeme spojité i diskrétní veličiny.

FOURIEROVA ŘADA

☑ Každou periodickou funkci $x(t+kT) = x(t)$, která vyhovuje Dirichletovým podmínkám, lze vyjádřit pomocí Fourierovy řady, pro kterou v exponenciálním tvaru je

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{in\omega_1 t},$$

kde $\dot{c}_n$ jsou komplexní *Fourierovy koeficienty* definované vztahem

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t} dt$$

a $\omega_1 = 2\pi/T$ je úhlový kmitočet první základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$.

Dirichletovy podmínky pro rozklad periodické funkce $x(t)$ do Fourierovy řady jsou:

1) $x(t)$ je absolutně integrovatelná nad každou periodou; 2) $x(t)$ má nad každou periodou pouze konečný počet maxim a minim; 3) $x(t)$ má nad každou periodou konečný počet nespojitostí.

Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné. Lze konstatovat, že všechny rozumné, tj. fyzikálně realizovatelné funkce Dirichletovy podmínky splňují.

FOURIEROVA ŘADA

☑ Modul komplexního Fourierova koeficientu $\dot{c}_n$ určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

☑ Pro n = 0 je

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).dt,$$

FOURIEROVA ŘADA

- Modul komplexního Fourierova koeficientu $\dot{c}_n$ určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

- Pro n = 0 je

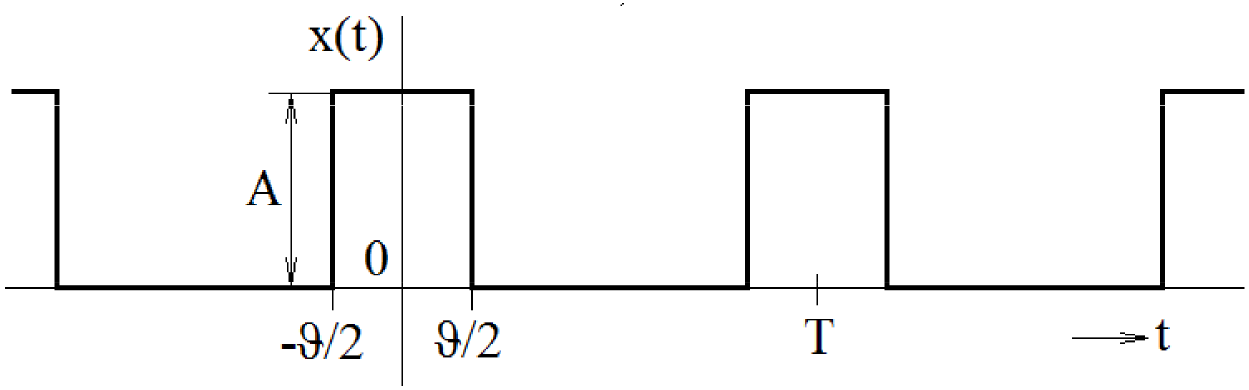
$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).dt,$$

což je střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce x(t).

- Pro reálné funkce x(t) je $\dot{c}_{-n} = \dot{c}_n^*$ (symbolem * označujeme komplexně sdruženou hodnotu).

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 1

Určeme parametry jednotlivých harmonických složek, z nichž se skládá obdélníkový pulz o základní periodě T, době trvání jednotlivých impulzů a výšce A. Nechť je první z impulzů umístěn symetricky kolem počátku časové osy.



FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

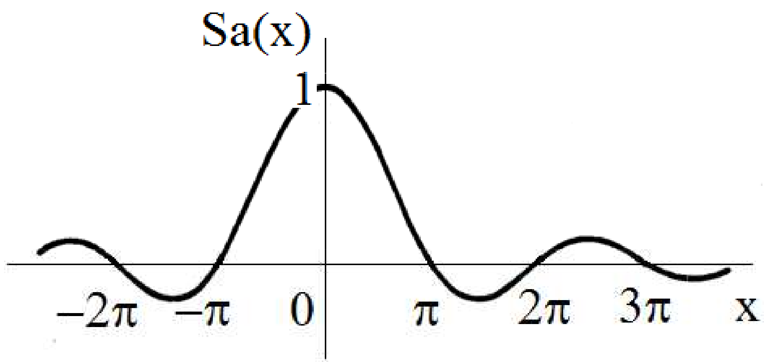
$$I(n\Omega) = \int_{-a}^{a} e^{\pm in\Omega t} dt$$

Pro n = 0 je

$$I(0) = \int_{-a}^{a} e^{\pm i0\Omega t} dt = \int_{-a}^{a} dt = 2a$$

a pro n ≠ 0

$$I(n\Omega) = \int_{-a}^{a} e^{\pm in\Omega t} dt = \left[\frac{e^{\pm in\Omega t}}{\pm in\Omega} \right]_{-a}^{a} = \frac{e^{in\Omega a} - e^{-in\Omega a}}{in\Omega} = \frac{2}{n\Omega} \cdot \frac{e^{in\Omega a} - e^{-in\Omega a}}{2i} = 2a . \frac{\sin n\Omega a}{n\Omega . a}$$



FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

$$I(n\Omega) = \int_{-a}^{a} e^{\pm in\Omega t} dt$$

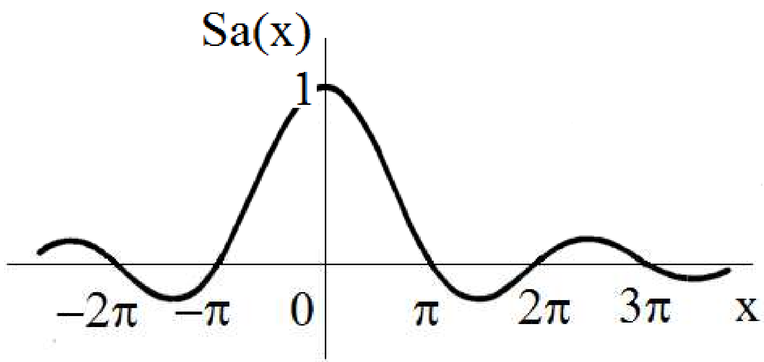
Pro n = 0 je

$$I(0) = \int_{-a}^{a} e^{\pm i0\Omega t} dt = \int_{-a}^{a} dt = 2a$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

a pro n ≠ 0

$$I(n\Omega) = \int_{-a}^{a} e^{\pm in\Omega t} dt = \left[\frac{e^{\pm in\Omega t}}{\pm in\Omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{e^{in\Omega a} - e^{-in\Omega a}}{in\Omega} = \frac{2}{n\Omega}.\frac{e^{in\Omega a} - e^{-in\Omega a}}{2i} = 2a.\frac{\sin n\Omega a}{n\Omega .a}$$

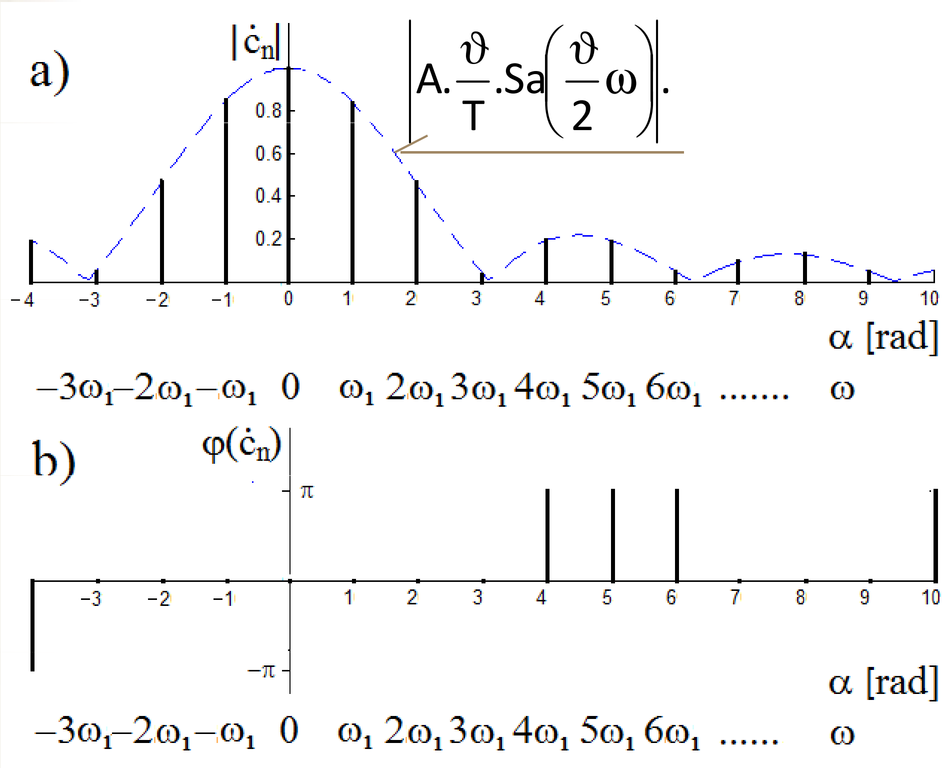


FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t).e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} A.e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{A}{T}\int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} e^{-in\omega_1 t}dt =$$

$$= \ldots = \frac{A}{T}.2.\frac{\vartheta}{2}.Sa\left(\frac{\vartheta}{2}n\omega_1\right) = A.\frac{\vartheta}{T}.Sa\left(\frac{\vartheta}{2}n\omega_1\right) = A.\frac{\vartheta}{T}.Sa\left(n\vartheta\frac{\pi}{T}\right).$$



Nulové hodnoty nabývá funkce Sa(x) pro argumenty rovné celočíselným násobkům π, tj.

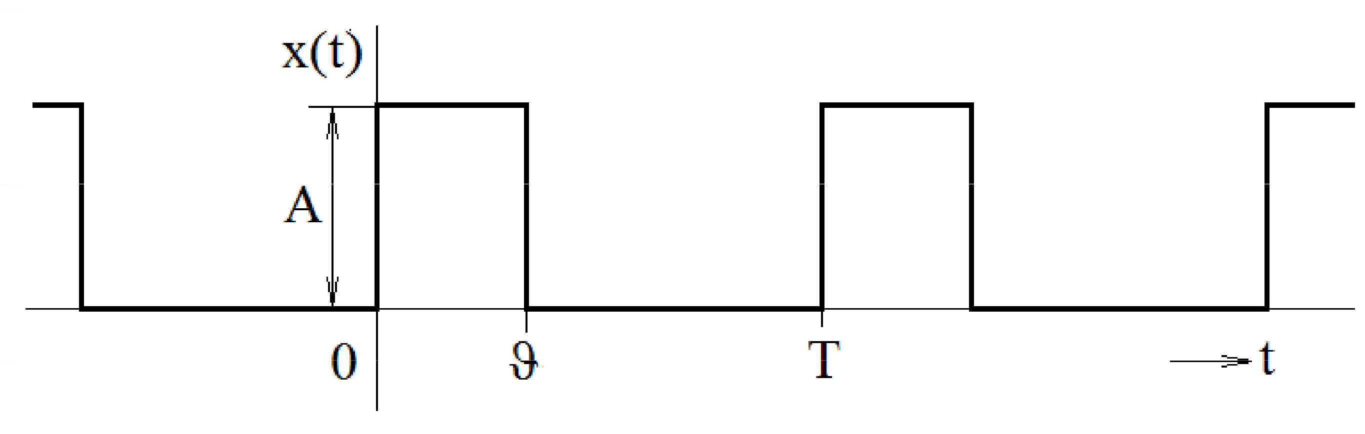
$$\frac{\vartheta}{2}\omega = \pm k\pi$$

a tedy pro frekvenci

$$\omega = \pm k\frac{2\pi}{\vartheta}.$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 2

Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?



FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2 - ŘEŠENÍ

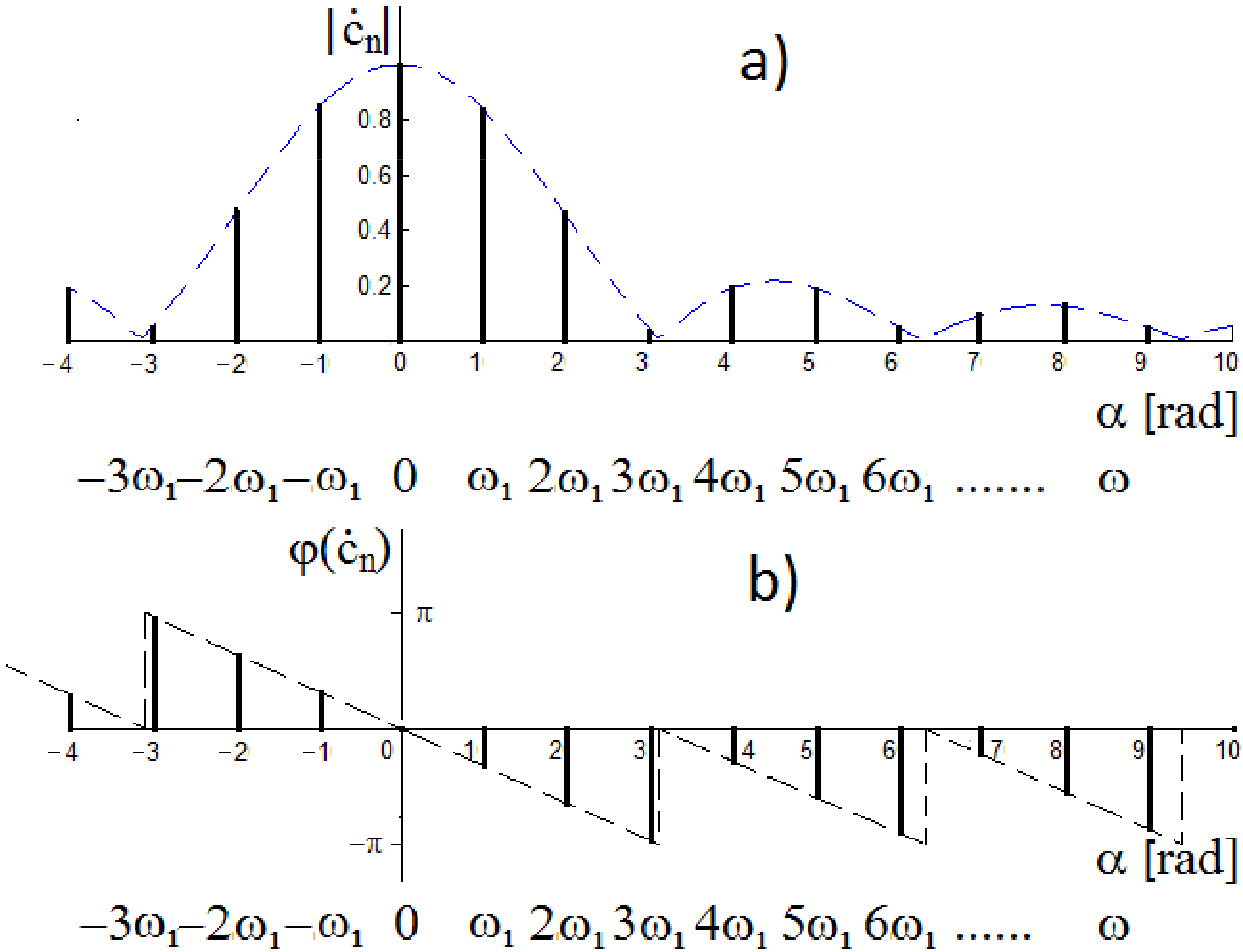
$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t).e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\vartheta} A.e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{A}{T}\int_0^{\vartheta} e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{A}{T}\left[-\frac{1}{in\Omega}e^{-in\omega_1 t}\right]_0^{\vartheta} =$$

$$= \frac{A}{T}.\left(-\frac{1}{in\omega_1}.e^{-in\omega_1\vartheta} + \frac{1}{in\omega_1}\right) = \frac{A}{T}.\frac{1}{in\omega_1}.\left(1 - e^{-in\omega_1\vartheta}\right) =$$

$$= \frac{A}{T}.\frac{2}{in\omega_1}.\frac{e^{in\omega_1\vartheta/2}.e^{-in\omega_1\vartheta/2} - e^{-in\omega_1\vartheta/2}.e^{-in\omega_1\vartheta/2}}{2} = \frac{A}{T}.\frac{2}{n\omega_1}.\frac{e^{in\omega_1\vartheta/2} - e^{-in\omega_1\vartheta/2}}{2j}.e^{-in\omega_1\vartheta/2} =$$

$$= \frac{A}{T}.\frac{2\vartheta}{n\omega_1\vartheta}.\sin(n\omega_1\vartheta/2).e^{-in\omega_1\vartheta/2} = \frac{A\vartheta}{T}.\frac{\sin(n\omega_1\vartheta/2)}{n\omega_1\vartheta/2}.e^{-in\omega_1\vartheta/2} = A.\frac{\vartheta}{T}.Sa\left(n\omega_1\frac{\vartheta}{2}\right).e^{-in\omega_1\frac{\vartheta}{2}}.$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 2 - VÝSLEDEK



FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro periodickou funkci je kmitočet základní harmonické složky

$$\omega_1 = 2\pi/T.$$

Pro **neperiodickou** funkci, tj. pro periodickou s $T \to \infty$ je

$$\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} = 0.$$

Pro neperiodický signál tedy budou spektrální čáry na sebe spojitě navazovat a definiční sumační vztah pro Fourierovu řadu přechází na vztah integrační, kde koeficienty $\dot{c}_n$ určíme následovně.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Ve vztahu

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t}dt$$

je T = $2\pi/d\omega$ a tedy pro limitní rozdíl dvou sousedních frekvencí $d\omega \to 0$ je $T \to \infty$ a $n\omega_1 \to \omega$. Meze integrálu budou pro nekonečně dlouho trvající funkci $-\infty$ a $+\infty$. Pro $T \to \infty$ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulzu **nekonečně malé**. Vyjádříme-li výše uvedený vztah pro $\dot{c}_n$ v limitním tvaru a dostáváme

$$\dot{c}_\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-i\omega t}dt$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE

připomeňme vztah pro Fourierovu řadu: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{in\omega_1 t}, \quad \dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t} dt$

V tom případě se definiční vztah Fourierova rozkladu transformuje do podoby

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-i\omega t} dt\right).e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega).e^{i\omega t} d\omega \qquad (*)$$

kde vztah $\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-i\omega t} dt$

nazýváme *Fourierovu transformací* a vztah (*) *inverzní (zpětnou) Fourierovu transformací*.

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Princip superpozice (! podmínka linearity !)

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a.s(t) \sim a.S(\omega)$$

Lineární kombinaci funkcí odpovídá lineární kombinace jejich spekter

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a.S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega).e^{-i\omega\tau}$$

Transpozice spektra

$$S(\omega-\Omega) \sim s(t).e^{i\Omega t}$$

Konvoluce funkcí

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(x).s_2(t-x).dx \approx S_1(\omega).S_2(\omega)$$

! SHRNUTÍ !

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitá periodická funkce** má **diskrétní** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitá jednorázová funkce** má **spojité** frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !