



ČASOVÉ ŘADY



Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz



XI. POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

PŘEDEVŠÍM VE FREKVENČNÍ DOMÉNĚ



POPIS SYSTÉMU

vnější popis

- vyjadřuje vztah mezi vstupní a výstupní veličinou;

vnitřní popis

- zohledňuje vnitřní strukturu systému/modelu;
- vyjadřuje vztah mezi stavovými, vstupními a výstupními veličinami;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

☑ **diferenční rovnice**

jednodruhová autonomní populace

(lineární, je-li je $r = \text{konst.}$)

$$s(n) = s(n-1) + s_b(n) - s_d(n) = s(n-1) \cdot (1 + b - d) = s(n-1) \cdot (1 + r)$$

$$s(n) - s(n-1) \cdot (1 + r) = 0$$

jednodruhová neautonomní populace

$$s(n) - s(n-1) \cdot (1 + r) = x(n)$$

nelineární autonomní systém (populace)

$$s(n) - s(n-1) \cdot p(s, n) = 0$$

nelineární neautonomní systém (populace)

$$s(n) - s(n-1) \cdot p(s, n) = x(n)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

☑ **diferenční rovnice**

$$\sum_{i=0}^n b_i y(kT_{vz} - iT_{vz}) = \sum_{i=0}^m a_i x(kT_{vz} - iT_{vz})$$

resp.

$$\sum_{i=0}^n b_i y(k - i) = \sum_{i=0}^m a_i x(k - i)$$

kde a_i a b_i jsou parametry systému, $x(k)$ jsou hodnoty vstupní posloupnosti a $y(k)$ hodnoty výstupní posloupnosti.

Je-li systém autonomní, tj. bez vstupu, je diferenční rovnice homogenní, s nulovou pravou stranou.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Parametry a_i a b_i mohou být obecně funkcemi jak vstupních i výstupních veličin (nelineární systémy), tak i času (časově závislé systémy). Jsou-li parametry konstantní, splňuje systém princip superpozice a systém je lineární.


Hodnota n určuje maximální zpoždění pro vzorky výstupní posloupnosti a současně řád systému, m určuje maximální zpoždění pro vzorky vstupní posloupnosti zahrnuté do výpočtu.

Alternativním zápisem diferenční rovnice může být výraz pro výpočet k -tého výstupního vzorku, který využívá hodnotu k -tého vzorku vstupní posloupnosti a předchozí vzorky jak vstupní, tak výstupní posloupnosti až do zpoždění m , resp. n

$$y(k) = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{b_0} x(k-i) - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{b_0} y(k-i)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

PŘÍKLAD:

Diferenční rovnice $y(k) = x(k) - 2y(k - 1) + y(k - 2)$ reprezentuje diskrétní, časově invariantní lineární rekurzivní systém, přičemž koeficienty diferenční rovnice jsou $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ a $b_2 = -1$. 

Diferenční rovnice a její řešení představuje to nejdůležitější, co očekáváme od konstrukce matematického modelu, tj. možnost určení průběhu veličin reprezentujících chování, tj. dynamiku modelovaného objektu.

Existuje i jiná možnost popisu systému, která by dokázala odhalit jiné zajímavé či užitečné vlastnosti zkoumaného systému ?

Lineární systémy představují značné zjednodušení – jejich parametry musí být konstantní. Nicméně právě lineární systémy umožňují různé formy popisu, přestože si zachovávají širokou oblast použití.

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(-i\omega k T_{vz}),$$

$X(\omega)$ je obecně komplexní funkce reálné proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(i\omega T_{vz})^{-k},$$

je-li $z = \exp(i\omega T)$, dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k},$$

oboustranná
Z-transformace

Z TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k}, \quad \text{jednostranná Z-transformace}$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz})) = 1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz} - nT_{vz})) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT_{vz} - nT_{vz}) \cdot z^{-k} = \Delta(0T_{vz}) \cdot z^{-n} = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany $(z-1)$ dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Linearita

$$a \cdot x(k) + b \cdot y(k) \sim a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

Posun vpravo $x(k) \cdot u(k)$

$$x(k-n) \cdot u(k-n) \sim z^{-n} X(z)$$

Posun vpravo $x(k)$

$$x(k-1) \sim z^{-1} X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2} X(z) + x(-2) + z^{-1} \cdot x(-1)$$

⋮

$$x(k-n) \sim z^{-n} X(z) + x(-n) + z^{-1} \cdot x(-n+1) + \dots + z^{-n+1} \cdot x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \dots, -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n} X(z),$$

což je totéž jako pro $x(k-n) \cdot u(k-n)$.

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

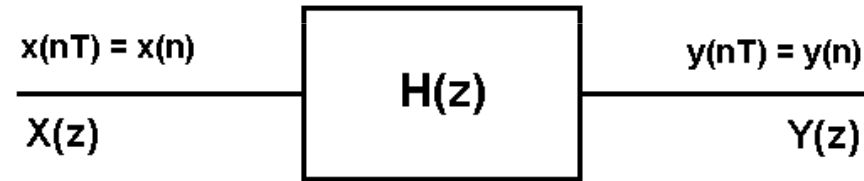
Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i) \cdot y(n-i) \approx X(z) \cdot Y(z)$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

$x(k)$	$X(z)$	oblast konvergence
$\delta(k)$	1	$\forall z$
$\delta(k-i)$	z^{-i}	pro $\forall z$ kromě $z=0$, když $i > 0$ nebo $z \rightarrow \infty$, když $i < 0$
$\sigma(k)$, resp. $-\sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$, resp. $ z < 1$
$a^k \sigma(k)$, resp. $-a^k \sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-a}$	$ z > a$, resp. $ z < a$
$ka^k \sigma(k)$, resp. $-ka^k \sigma(-k-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a$, resp. $ z < a$
$(k+1)a^k \sigma(k)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$ z > a$
$\cos(k\Omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(k\Omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z \cdot \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$[a^k \cdot \cos(k\Omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z^2 - a \cdot z \cdot \cos \Omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \Omega_0 + a^2}$	$ z > a$
$[a^k \cdot \sin(k\Omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z \cdot a \cdot \sin \Omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \Omega_0 + a^2}$	$ z > a$
$\begin{cases} a^k, & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT_{vz}) = h(nT_{vz}) * x(nT_{vz})$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$H(z) = Y(z)/X(z)$, kde $H(z)$ je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\sum_{i=0}^n b_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m a_i x(k-i) \quad a \cdot x(k) + b \cdot y(k) \sim a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = A \cdot \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^n (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^m (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} ... nulové body; z_{pi} ... póly

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU DIFERENČNÍ ROVNICE



$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\begin{aligned} (b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0) \cdot Y(z) &= \\ &= (a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0) \cdot X(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m Y(z) \cdot z^{-m} + b_{m-1} Y(z) \cdot z^{-m+1} + b_{m-2} Y(z) \cdot z^{-m+2} + \dots + b_0 \cdot Y(z) &= \\ = a_n X(z) \cdot z^{-n} + a_{n-1} X(z) \cdot z^{-n+1} + a_{n-2} X(z) \cdot z^{-n+2} + \dots + a_0 \cdot X(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m y(iT_{vz} - mT_{vz}) + b_{m-1} y(iT_{vz} - mT_{vz} + T_{vz}) + b_{m-2} y(iT_{vz} - mT_{vz} + 2T_{vz}) + \dots + b_0 y(iT_{vz}) \\ = \end{aligned}$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$\begin{aligned} = a_n x(iT_{vz} - nT_{vz}) + a_{n-1} x(iT_{vz} - nT_{vz} + T_{vz}) + a_{n-2} x(iT_{vz} - nT_{vz} + 2T_{vz}) + \dots + a_0 x(iT_{vz}) \\ y(iT_{vz}) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_0} \cdot x(iT_{vz} - kT_{vz}) - \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{b_0} \cdot y(iT_{vz} - kT_{vz}) \end{aligned}$$

diferenční rovnice

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m z^{m-n}}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}$$

$$z = \exp(i\omega T_{vz})$$

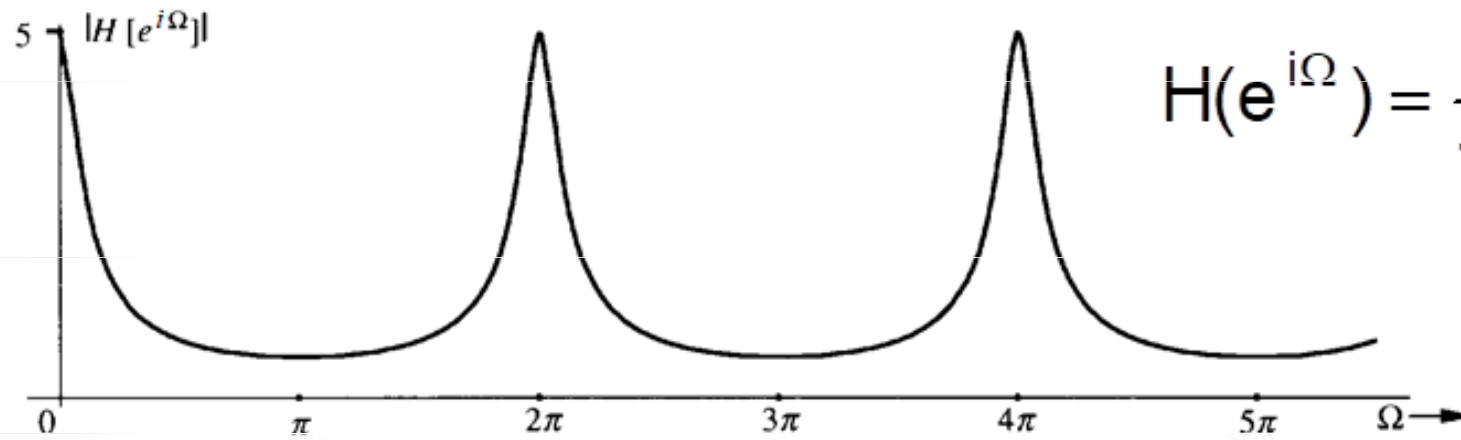
$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{i\omega m T_{vz}} + a_1 e^{i\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{i\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + a_m e^{i\omega(m-n)T_{vz}}}{b_0 e^{i\omega m T_{vz}} + b_1 e^{i\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{i\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + b_m e^{i\omega 0 T_{vz}}}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

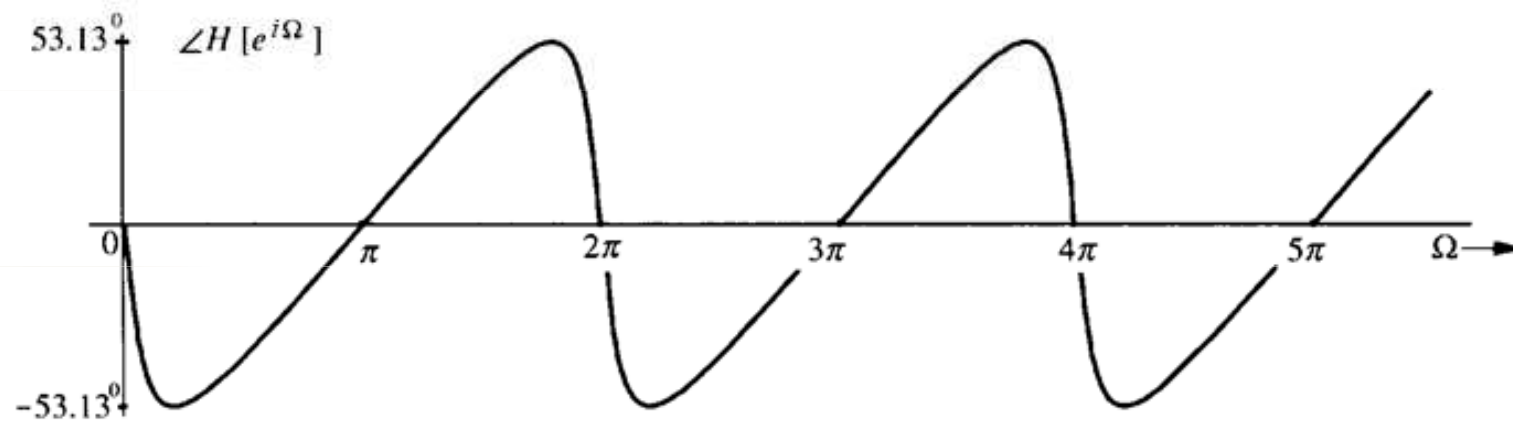
$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{i\omega m T_{vz}} + a_1 e^{i\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{i\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + a_m e^{i\omega(m-n)T_{vz}}}{b_0 e^{i\omega m T_{vz}} + b_1 e^{i\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{i\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + b_m e^{i\omega 0 T_{vz}}}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{i\varphi}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot e^{-i\Omega}}$$



VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

• konvoluce

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})) = 1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z) \cdot \mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})))$$

odezva na jednotkový impuls -
- impulsová charakteristika

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Z transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$ hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$ hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$$Z(u(kT_{vz})) = 1/1-z^{-1} = z/(z-1)$$

$$Y(z) = G(z) = H(z).z/(z-1)$$

LINEÁRNÍ SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY

Jak se situace změní, když má systém více vstupů, resp. více výstupů?

Lineární časově invariantní systém (tj. s konstantními parametry) s více vstupy lze řešit s použitím principu *superpozice*. Podle něj lze každý vstup uvažovat jednotlivě s tím, že všechny ostatní vstupy jsou vynulovány. Poté součet všech výstupních reakcí na separované, ovšem na systém současně přivedené vstupy dává celkovou odezvu systému.

LINEÁRNÍ SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY

Jak se situace změní, když má systém více vstupů, resp. více výstupů?

K zamyšlení:

Je potřeba případ více výstupů řešit na základě nějakého specifického pravidla nebo nikoliv?

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenční rovnice;
2. obrazová neboli operátorová přenosová funkce (z transformace);
3. rozložení nulových bodů a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – modulová, fázová;
6. impulsní charakteristika;
7. přechodová charakteristika.;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

