

Diferenciální rovnice

Zdeněk Kříž

29. dubna 2021

Úvod

Diferenciální rovnice jsou matematické rovnice, ve kterých jako proměnné vystupují funkce a jejich derivace. Každý z vás se už s diferenciální rovnicí setkal, i když ve vyřešeném tvaru. Vzpomínáte si na hodiny fyziky a výpočet rychlosti tělesa za pomoci dráhy a času? Zde jste používali již vyřešenou diferenciální rovnici. Diferenciální rovnice nejsou ale pouze součástí fyziky, setkáme se s nimi téměř ve všech oblastech lidského bádání.

Diferenciál

Při řešení diferenciálních rovnic narazíme na pojem **diferenciál**, se kterým budeme pracovat.

Diferenciál v matematice vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu. Tuto závislost aproximuje jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu. Pro funkce více proměnných se používá totální diferenciál.

Rozdělení diferenciálních rovnic

- **Obyčejné diferenciální rovnice** Obsahují neznámou funkci jedné nezávislé proměnné a její derivace. Nejjednodušší třídou jsou lineární diferenciální rovnice.
- **Parciální diferenciální rovnice** Jsou v matematice rovnice obsahující neznámou funkci několika nezávisle proměnných a její parciální derivace dle těchto proměnných. Parciální diferenciální rovnice jsou zobecněním obyčejných diferenciálních rovnic, které obsahují neznámou funkci jedné proměnné a její derivace. Každá obyčejná diferenciální rovnice je současně i parciální diferenciální rovnicí.

Řád diferenciální rovnice

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která je v ní obsažená. Za řád soustavy diferenciálních rovnic považujeme hodnotu nejvyšší derivace, která se v soustavě vyskytuje. Podle řádu bývají diferenciální rovnice děleny na diferenciální rovnice prvního řádu a diferenciální rovnice vyšších řádů.

Diferenciální rovnice, v nichž se hledaná funkce vyskytuje pouze lineárně, přičemž se nikde nevyskytují ani součiny hledané funkce s jejími derivacemi, ani součiny derivací této funkce, označujeme jako lineární diferenciální rovnice. Pokud jedna z uvedených podmínek není splněna, hovoříme o nelineárních diferenciálních rovnicích.

Řešení diferenciální rovnice

Řešení diferenciálních rovnic dělíme na

- obecné – Jako obecné řešení označujeme takové řešení diferenciální rovnice, které obsahuje libovolnou integrační konstantu. Přiřadíme-li každé konstantě obecného řešení určitou číselnou hodnotu, získáme řešení partikulární.
- partikulární (částečné) – Partikulární (částečné) řešení je řešení diferenciální rovnice, které získáme přiřazením určité číselné hodnoty každé integrační konstantě obecného řešení.
- singulární (výjimečné) – Některá řešení nelze získat z obecného řešení. Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech oboru, označujeme jako singulární nebo výjimečná.
- homogenní

Doposud jsme při řešení rovnic, které byly ve tvaru $f(x) = 0$ (funkce jedné proměnné), hledali reálné číslo (kořen rovnice), které splňovalo podmínku. Nyní budeme řešit zcela jiný typ rovnic a jejich řešením nebude číslo, ale funkce. Příkladem může být zadání:
Hledejme takovou funkci, která je rovna své derivaci, tedy $y = y'$.
Rovnici například vyhovuje naše velmi dobře známá funkce e^x . Této rovnici ale vyhovují násobky funkce e^x . Řešení $y = k \cdot e^x$, kde k je libovolná konstanta, se nazývá **obecné řešení**. Pokud budeme mít stanovenou podmínku $y(0) = 2$, dosazením do obecného řešení dostáváme $2 = k \cdot e^0$, odtud $k = 2$. Řešení $y = 2e^x$ je **partikulární řešení**, které splňuje počáteční podmínku pro $x = 0$ je $y = 2$.

Jsou to rovnice ve tvaru:

$$y' = f(x)g(y) \quad (1)$$

kde f a g jsou spojité funkce. Derivace funkce y' je rovna podílu diferenciálů dy a dx , tedy $y' = \frac{dy}{dx}$, dosazením do rovnice 1 dostáváme:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (2)$$

Za předpokladu, že funkce $g(y)$ je nenulová, separujeme proměnné, tedy upravíme rovnici tak, že výrazy s proměnnou y převedeme na jednu stranu rovnice a výrazy s proměnnou x převedeme na druhou stranu rovnice. Získáme rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (3)$$

Tuto rovnici můžeme zintegrovat:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad (4)$$

Nesmíme zapomenout, že primitivní funkce se liší o konstantu. Přičtením konstanty k jedné straně rovnice obdržíme obecné řešení diferenciální rovnice. Pokud známe počáteční podmínky pro řešení, můžeme vypočítat hodnotu přičtené konstanty a tím získat partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje zadané počáteční podmínky.

Příklad 1 Nyní si ukázkově vyřešíme dříve zmíněnou diferenciální rovnici $y = y'$.

$$y = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

$$x + C = \ln y$$

$$y = e^{x+C}$$

$$y = e^x \cdot e^C$$

protože, e^C je konstanta, můžeme ji nahradit konstantou $K = e^C$ a získáme hledanou rovnici:

$$y = Ke^x$$

Příklad 2 Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 2xy$.
Řešení: Rovnici si přepíšeme do diferenciálového tvaru.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

odtud za předpokladu, že $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

Obě strany rovnice zintegrujeme:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

Vyřešením integrálů na obou stranách rovnice dostaneme tvar:

$$\ln |y| = x^2 + K$$

Aplikujeme pravidla pro počítání s logaritmy:

$$\ln |y| = x^2 + K = \ln e^{x^2} + \ln e^K = \ln e^{x^2} e^K$$

Po odlogaritmování dostáváme řešení:

$$|y| = e^{x^2} e^K$$

Konstantu e^K můžeme přepsat do tvaru $C = e^K$, kde $C \in \mathbb{R}$ a rovnicí převedeme na tvar:

$$y = Ce^{x^2}$$

V případě, že $C = 0$ bude zde zahrnuto i řešení $y = 0$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Jedná se o diferenciální rovnice tvaru:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (5)$$

kde $p(x)$ a $f(x)$ jsou spojité funkce.

Rovnici

$$y' + p(x)y = 0 \quad (6)$$

nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnicí - HLDR.**

Rovnici

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (7)$$

nazýváme **nehomogenní lineární diferenciální rovnicí - NLDR**.
Vyřešení HLDR je snadné - rovnici lze převést na rovnici se separovanými proměnnými. Řešení NLDR získáme tak, že k obecnému řešení příslušné HLDR přičteme jedno partikulární řešení NLDR.

Příklad 3 Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = 2y + x$.

Řešení:

1. krok: Nejprve vyřešíme homogenní rovnici: $y' = 2y$.
Protože se jedná o rovnici se separovanými proměnnými, její řešení lehce zvládneme.

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$

Řešením rovnice $\ln |y| = 2x + K$ a po odlogaritmování obdržíme obecné řešení homogenní rovnice

$$y_0 = Ce^{2x}$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

2. krok: Pro hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme **metodu variace konstanty**, kdy konstantu C nahradíme funkcí $C(x)$ proměnné x a vypočteme její první derivaci podle x .

$$y_p = C(x)e^{2x} \quad (8)$$

Derivací podle proměnné x dostáváme rovnici (jedná se o derivaci součinu)

$$y'_p = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$$

Dosazením za y a y' do původní rovnice získáme rovnici:

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + x$$

úpravou této rovnice (odečtením výrazu $2C(x)e^{2x}$ a vydělením výrazem e^{2x} dostáváme výraz:

$$C'(x) = xe^{-2x}$$

Tuto rovnici zintegrujeme (použijeme metodu *per partes*)

$$C(x) = \int xe^{-2x} = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Dosazením $C(x)$ do partikulárního řešení 8 obdržíme:

$$y_p = C(x)e^{2x} = \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Příklad 4 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(1) = \frac{3}{2}$.

Řešení:

1. krok Nalezneme řešení homogenní rovnice $y' - 2\frac{y}{x} = 0$, tedy $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

řešení vede na logaritmy:

$$\ln |y| = 2 \ln x + \ln C \Rightarrow \ln |y| = \ln(Cx^2)$$

odtud

$$|y| = Cx^2$$

protože hledáme řešení, vzhledem k počáteční podmínce, v intervalu $(0; \infty)$, můžeme danou rovnici přepsat do tvaru:

$$y = Cx^2$$

2. krok Vytvoříme a vyřešíme příslušnou nehomogenní lineární rovnici. $y_p(x) = C(x)x^2$.

$$y_p'(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$$

dosazením do původní rovnice obdržíme rovnici:

$$C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2C(x)x^2}{x} = 2x^3$$

po úpravách dostáváme:

$$C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = \int 2x dx = x^2$$

partikulární řešení má tvar:

$$y_p(x) = x^4$$

3. krok Součet obecného řešení HLDR a partikulárního řešení NLDR je obecným řešením zadané diferenciální rovnice.

$$y(x) = Cx^2 + x^4$$

Hledané partikulární řešení obdržíme dosazením počátečních podmínek do obecného řešení a výpočtem konkrétní hodnoty konstanty C .

$$y(1) = 1 + C = \frac{3}{2}$$

odtud

$$C = \frac{1}{2}$$

Hledané partikulární řešení je tedy:

$$y(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^2$$

kde $x \in (0; \infty)$.

Příklad 5 Kromě metody variace konstanty můžeme použít i metodu integračního faktoru. Máme-li NLDR tvaru:

$$y' + p(x)y = f(x)$$

můžeme ji řešit tak, že obě strany rovnice vynásobíme výrazem $I(x) = e^{\int p(x)dx}$, který nazýváme integračním faktorem, a poté rovnici zintegrujeme.

Při řešení NLDR

$$y' + 3x^2y = 6x^2$$

je integračním faktorem výraz:

$$I(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

po vynásobení obou stran rovnice výrazem e^{x^3} dostáváme rovnici:

$$e^{x^3}y' + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

$$e^{x^3} y' + 3x^2 e^{x^3} y = 6x^2 e^{x^3}$$

Při pozorném zkoumání předchozí rovnice zjistíme, že na levé straně máme rozepsanou derivaci součinu. Rovnici proto můžeme upravit do tvaru:

$$(e^{x^3} y)' = 6x^2 e^{x^3}$$

nyň můžeme obě strany rovnice zintegrovat:

$$e^{x^3} y = \int 6x^2 e^{x^3} dx$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme substitucí $t = x^3$, odtud $dx = \frac{dt}{3x^2}$ dostaneme tak výraz:

$$e^{x^3} y = 2e^{x^3} + C$$

úpravou rovnice dostáváme:

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

Tento výraz je obecným řešením zadané lineární diferenciální rovnice.

Radioaktivita a radioaktivní rozpad

Radioaktivita je jev, při němž dochází k vnitřní přeměně složení nebo energetického stavu atomových jader, přičemž je zpravidla emitováno vysokoenergetické ionizující záření. Ernest Rutherford, který dokázal, že rychlost radioaktivního rozpadu je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku N . Tento jev je závislý na čase $N(t)$. Radioaktivní rozklad můžeme popsat diferenciální rovnicí:

$$N' = -\lambda N$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta přeměny. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, u které můžeme zavést počáteční podmínku $N(0) = N_0$, tedy v čase počátku měření máme N_0 atomů.

Změnu počtu atomů můžeme zapsat pomocí rovnice:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Po separaci proměnných obdržíme:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Tuto rovnici zintegrujeme

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\lambda dt$$

. Odtud dostáváme řešení

$$N(t) = Ke^{-\lambda t}$$

Aby byla splněna počáteční podmínka musí platit $N_0 = Ke^0$ a řešení počáteční úlohy má tvar:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Poločas rozpadu

Pro úlohy tohoto typu je důležitý pojem **poločas rozpadu**, což je doba, za kterou se přemění právě polovina atomů. V praxi se tohoto jevu využívá k určování stáří organických látek, kde sledujeme izotop uhlíku ^{14}C , jehož poločas rozpadu je 5568 let. Čím delší je poločas rozpadu, tím stabilnější je daný izotop. V lékařské praxi se využívají naopak izotopy s malým poločasem rozpadu. Radioaktivní prvky s dlouhým poločasem rozpadu mohou být při kontaminaci ve velké koncentraci nebezpečné pro zdraví živočichů.

Příklad 6 Pro izotop uhlíku ^{14}C známe poločas rozpadu, který je 5568 let. Za jak dlouho se přemění $\frac{1}{4}$ jader izotopu uhlíku ^{14}C . Dosadíme-li do vztahu za $N(t) = \frac{1}{2}N_0$ a $t = 5568$ dostaneme:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-5568\lambda}$$

vydělením rovnice výrazem N_0 dostáváme:

$$\frac{1}{2} = e^{-5568\lambda}$$

Rovnici zlogaritmuje a získáme výraz:

$$-\ln 2 = -5568\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5568}$$

Pro přeměnu $\frac{1}{4}$ jader izotopů platí:

$$\frac{3}{4}N_0 = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{5568}t}$$

Odtud pro t platí:

$$t = -\frac{5568 \ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 2310$$

Čtvrtina všech jader izotopu uhlíku ^{14}C se přemění za 2310 let.

Kinetika chemických reakcí

Rychlost chemické reakce

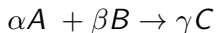
Rychlost chemické reakce tedy vyjádříme jako podíl změny koncentrace za časový úsek.

$$v = \frac{d(c)}{d(t)}$$

Pro snazší zápis budeme pro zápis koncentrace látky A místo $c(A)$ používat nám již dobře známý zápis $[A]$. Protože při chemické reakci dochází ke spotřebě výchozích látek budeme jejich koncentraci uvádět se záporným znaménkem, naopak produktů při reakci přibývá a proto budeme změnu jejich koncentrace vyjadřovat kladným znaménkem.

$v = -\frac{d[A]}{d(t)}$ pro výchozí látky a $v = \frac{d[C]}{d(t)}$ pro produkty.

Jak ale víme z praxe, nemusí vždy rychlost chemické reakce záviset pouze na koncentraci jedné látky a v případě některých reakcí může dokonce záviset na mocnině koncentrace chemické látky, nebo na součinu koncentrací několik látek. Uvažujme reakci:



Při vyjadřování rychlosti chemické reakce tedy využíváme stechiometrické koeficienty.

$$v = -\frac{[A]^\alpha}{d(t)}$$

Řád chemické reakce

Uvažujeme-li kinetickou rovnici:

$$v = k \cdot [A]^{\alpha} \cdot [B]^{\beta}$$

hovoříme o dílčím řádu reakce α vůči koncentraci látky A a dílčím řádu reakce β vůči koncentraci látky B . Celkový řád reakce je roven součtu $\alpha + \beta$.

Reakce nultého řádu

Pro tento druh chemických reakcí je charakteristické, že reakce probíhá konstantní rychlostí a není závislá na koncentraci reagujících látek. Matematicky tento vztah vyjádříme:

$$v = k [A]^0 [B]^0$$

tedy

$$v = k \cdot 1 \cdot 1 = k$$

Rovnici rychlosti chemické reakce můžeme zapsat následovně:

$$-\frac{dc}{dt} = k$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit metodou separace proměnných.

$$-dc = k \cdot dt$$

$$dc = -k \cdot dt$$

Před integrací musíme ještě stanovit meze, protože řešíme reálný případ, který probíhá v konečném časovém úseku a za určité počáteční koncentrace. Příklad řešíme pro koncentraci reaktantu, který se v průběhu chemické reakce spotřebovává, proto je před změnou koncentrace záporné znaménko. Integraci budeme provádět pro časový úsek v čase od 0 do času t . Na počátku bude koncentrace reaktantu c_0 a po čase t bude koncentrace reaktantu rovna hodnotě c .

Matematicky zapsáno:

$$\int_{c_0}^c dc = -k \int_0^t dt$$

$$[c]_{c_0}^c = -k[t]_0^t$$

$$c - c_0 = -k(t - 0)$$

$$c_0 - c = k t$$

Jak zjistíme dále, bude mít rychlostní konstanta různé jednotky pro různé řády chemických reakcí. V našem případě určíme jednotku rychlostní konstanty následovně.

$$k = \frac{c_0 - c}{t}$$

koncentrace je udávána v jednotkách $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$, čas je v sekundách s.

Rychlostní konstanta má tedy jednotku:

$$\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3 \cdot \text{s}}$$

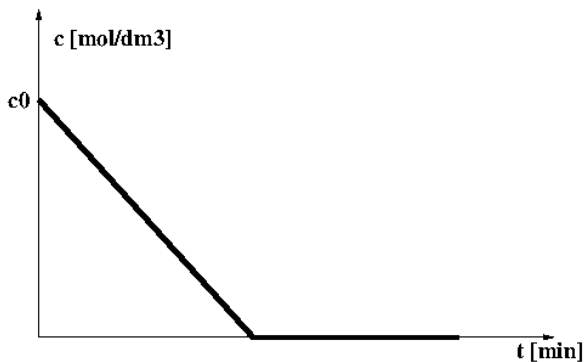
Poločas chemické reakce Podobně jako v případě radiaktivního rozpadu hovoříme o poločasu rozpadu látky, je poločas chemické reakce definován jako čas, kdy sledovaná koncentrace reaktantu poklesne na polovinu. V čase t je tedy koncentrace rovna $\frac{1}{2}c_0$. Kinetická rovnice má tedy tvar:

$$c_0 - \frac{1}{2}c_0 = k \cdot t$$

$$\frac{1}{2}c_0 = k \cdot t$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{c_0}{2k}$$

Graf rychlosti chemické reakce nultého řádu



Obrázek: Graf rychlosti chemické reakce pro reakci nultého řádu

Reakce 1. řádu

V tomto případě je rychlost chemické reakce závislá na první mocnině koncentrace jedné sledované látky $v = k [A]$. Rychlost rovnice reakce prvního řádu můžeme zapsat následovně:

$$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c$$

I v tomto případě řešíme diferenciální rovnici metodou separace proměnných a opět integrujeme pro časový úsek od 0 do t a koncentrace od c_0 do c .

$$-dc = k \cdot c \cdot dt$$

$$\frac{dc}{c} = -k dt$$

$$\int_{c_0}^c = -k \int_0^t dt$$

$$[\ln c]_{c_0}^c = -k \cdot t$$

$$\ln c - \ln c_0 = -kt$$

$$\ln \frac{c}{c_0} = -kt$$

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

Již z tohoto výsledku je zřejmé, že rychlostní konstanta bude mít pro reakci 1. řádu jinou jednotku, než pro reakci nultého řádu. Proto si ji odvodíme.

$$k = \frac{\ln \frac{c_0}{c}}{t}$$

V čitateli zlomku máme přirozený logaritmus podílu koncentrací, tedy bezrozměrnou veličinu. Ve jmenovateli je jednotka času, tedy sekunda s. Rychlostní konstanta má tedy jednotku s^{-1} .

Poločas chemické reakce Podobně jako v předchozím případě si odvodíme poločas chemické reakce 1. řádu.

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{c_0}{\frac{1}{2}c_0}\right) = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{k} \ln 2$$

Výsledná rovnice má tvar:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

Je vidět, že poločas chemické reakce 1. řádu nezávisí na počáteční koncentraci výchozí látky.

Reakce 2. řádu

Reakce druhého řádu pro případ, kdy je rychlost chemické reakce závislá na koncentraci pouze jedné látky. V tomto případě lze rychlost chemické reakce vyjádřit rovnicí:

$$v = k \cdot [A]^2$$

nebo také:

$$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c^2$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme stejně jako předchozí pomocí metody separace proměnných. Postup řešení vypadá následovně:

$$\frac{dc}{c^2} = -k \cdot dt$$

$$\left[-\frac{1}{c}\right]_{c_0}^c = -k \cdot [t]_0^t$$

$$-\frac{1}{c} - \left(-\frac{1}{c_0}\right) = -k \cdot t$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = k \cdot t$$

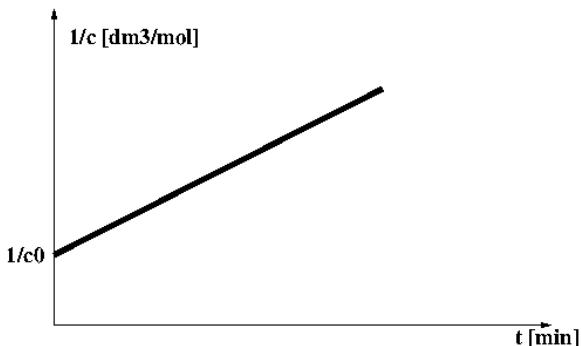
Stejně jako v předchozích případech, i zde se podíváme na jednotky rychlostní konstanty chemické reakce. Opět vidíme, že i v tomto případě bude mít rychlostní konstanta opět jiný rozměr. Osamostatněním rychlostní konstanty získáme:

$$k = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} \right)$$

jednotka rychlostní konstanty tedy bude:

$$dm^3 \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$$

Graf rychlosti chemické reakce druhého řádu



Obrázek: Graf rychlosti chemické reakce pro reakci 2. řádu

V numerické matematice je numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic postup, kterým můžeme získat přibližné řešení obyčejných diferenciálních rovnic (ne parciálních). Používá se v případech, kdy by bylo nalezení přesného (analytického) řešení náročné nebo v případech, kdy analytické řešení nelze najít.

Eulerova metoda Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou. Začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou. Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice přímo z derivace.

Uvažujme počáteční úlohu:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Potřebujeme nalézt přibližné řešení $y(x)$ pro $x \in [x_0; x_0 + a]$.
Postupujeme tak, že interval rozdělíme na n podintervalů délky h_i ,
takto dostaneme dělicí body:

$$x_1 = x_0 + h_1, x_2 = x_1 + h_2, \dots, x_n = x_{n-1} + h_n = x_0 + a$$

kde $h_1 + h_2 + \dots + h_n = a$. Za pomoci funkčních hodnot
vypočteme $y'_0 = f(x_0, y_0)$ a položíme

$$y_1 = y_0 + h_1 y'_0 = y_0 + h_1 f(x_0, y_0)$$

Podobně určíme $y_2 = y_1 + h_2 f(x_1, y_1)$ a stejně budeme postupovat dále. Dostaneme tak přibližné řešení:

$$y(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i)$$

pro $x \in [x_i, x_{i+1}]$, ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Nejjednodušším způsobem dělení intervalu je použití stejně vzdálených dělicích bodů. V tomto případě bude Eulerova metoda popsána následovně:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = (0, 1, 2, \dots, n)$$

Modelový příklad

Pomocí Eulerovy metody určete přibližné řešení počáteční úlohy $y' = x + y$ pro $y(0) = 1$ s krokem $h = 0,1$. Získaný výsledek porovnejte s analytickým řešením.

Řešení: Máme dáno: $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x, y) = x + y$.
Podle výše popsaného postupu budeme postupně počítat:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362$$

Podobně pak postupujeme dále.

Výsledky si zapíšeme do tabulky:

i	x_i	y_i		i	x_i	y_i
1	0,1	1,100000		6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000		7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000		8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200		9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020		10	1,0	3,187485

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, jejíž řešením je $y(x) = 2e^x - x - 1$ a pro $y(1) = 2e - 2 \approx 3,436564$. Chyba našeho numerického řešení od analytického řešení je 0,249079.

Runge - Kuttovy metody

Zatímco Eulerova metoda používá jako směrnici $k = f(x_i, y_i)$ hodnotu směrového pole v bodě, ze kterého vychází, nejjednodušší Runge - Kuttova metoda sleduje hodnoty směrového pole v bodě, kam bychom došli v případě polovičního kroku od výchozího bodu -
Metoda RK druhého řádu.

Ještě sofistikovanější metoda je **RK4 - metoda čtvrtého řádu**. Zde podobně jako u metody druhého řádu uděláme fiktivně půl kroku směrem k_1 podle Eulerovy metody a ze směrového pole v bodě do kterého se dostaneme získáme směr k_2 . Poté podobně provedeme opět fiktivně půl kroku směrem k_2 a ze směrového pole v bodě, do kterého se dostaneme, získáme směr k_3 . Konečně, směrem k_3 provedeme fiktivně celý krok a získáme směr k_4 . Ze všech těchto směrů vypočítáme vážený průměr ve kterém jsou k_2 a k_3 zastoupeny dvojnásobnou vahou oproti k_1 a k_4 a získáme směr pro provedení dalšího kroku metody.

Matematicky vyjádříme Eulerovu metodu takto:

$$x_{i+1} = x_i + h; y_{i+1} = y_i + h.k; k = k_1 = f(x_i, y_i)$$

Runge - Kuttovu metodu druhého řádu vyjádříme takto:

$$x_{i+1} = x_i + h; y_{i+1} = y_i + h.k; k = k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ jako v Eulerově metodě.

Runge - Kuttovu metodu čtvrtého řádu vyjádříme takto:

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad y_{i+1} = y_i + h.k; \quad k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

kde $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2})$,
 $k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2})$ a $k_4 = f(x_i + h, y_i + h)$.

Popsaná metoda RK4 dosahuje v jednom kroku chyby odpovídající h^5 , kumulativní chyba je pak v řádu h^4 . Neuvažujeme-li vliv zaokrouhlovacích chyb, tak menší krok obvykle vede k přesnějšimu odhadu, avšak za cenu více počítání.