Diferenciální rovnice

Tomáš Raček

Malthusiánský model I

(1798) [množení bakterií]

- růst populace jedinců s neomezenými zdroji
- rychlost růstu závisí na velikosti populace

$t =$ čas

$p(t) =$ velikost populace v čase t

$$\frac{dp}{dt} = \text{jak se mění vel. populace v čase}$$

$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{k}_{\text{konstanta úměrnosti}} \cdot p$$

POZOROVÁNÍ:

$$\left.\begin{array}{l} p(t) > 0 \\ k > 0 \end{array}\right\} \frac{dp}{dt} > 0$$

$p(t)$ je rostoucí

$p(t) = ?$

Malthusiánský model II – řešení

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

$p > 0$

$p \neq 0$

$$\int \frac{dp}{p} = \int k\,dt$$

$$\cancel{e}^{(\cancel{\ln}|p|)} = e^{(k \cdot t + C_1)}$$

$$|p| = e^{kt + c_1}$$

$$p = e^{kt + c_1}$$

$$p = e^{kt} \cdot e^{c_1}$$

$$\boxed{p = e^{kt} \cdot C}$$

POČÁTEČNÍ PODMÍNKA:

$p(0)$ = iniciální velikost populace v čase $t=0$

$= p_0$

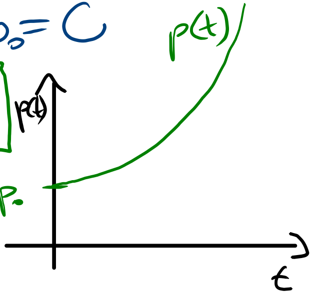
$p_0 > 0$

$$p_0 = C \cdot e^{k \cdot \cancel{0}} \quad 1$$

$$p_0 = C$$

$$\boxed{p(t) = p_0 \cdot e^{kt}}$$

EXPONENCIÁLNÍ MODEL



Malthusiánský model III – příklad

$$p(t) = p_0 e^{kt}$$

Př.: $p(0) = p_0 = 50$

$p(12) = 1000$

$p(18) = ?$

$\cancel{1000}^{20} = \cancel{50} \cdot e^{k \cdot 12}$

$20 = e^{k \cdot 12}$

$\ln 20 = k \cdot 12$

$\boxed{k = \frac{\ln 20}{12}}$

$p(18) = 50 \cdot e^{\frac{\ln 20}{12} \cdot 18}$

$p(18) = 50 \cdot e^{\frac{\ln 20}{2} \cdot 3}$

$p(18) \doteq 4472$

$p(24) = 20\,000$

$p(48) = 3$ mil

$p(1\ \text{měsíc}) = ?$

Logistický model I (1838)

- rozšiřuje Malthusiánský model o omezené zdroje

$N =$ kapacita systému → nezávisí na čase

$$\frac{dp}{dt} = k\cdot p\cdot\left(1-\frac{p}{N}\right) \rightarrow \underbrace{kp - \frac{k}{N}\cdot p^2}$$

kvadratická fce v prom. p

ROVNOVÁŽNÉ STAVY:

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

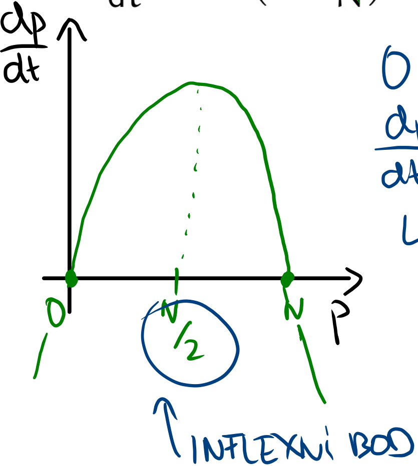
(= nemění se velikost populace)

1) $p = 0$

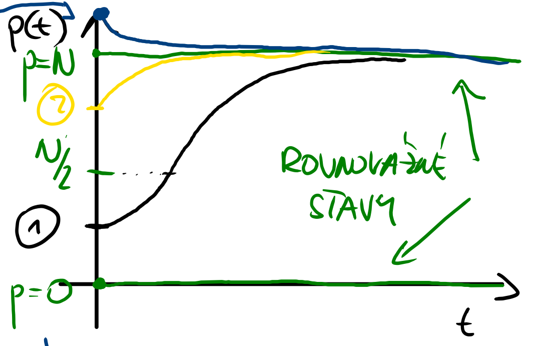
2) $p = N$

Logistický model II

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right)$$



$p_0 > N$



$0 < p_0 < N$:

$\frac{dp}{dt} > 0$

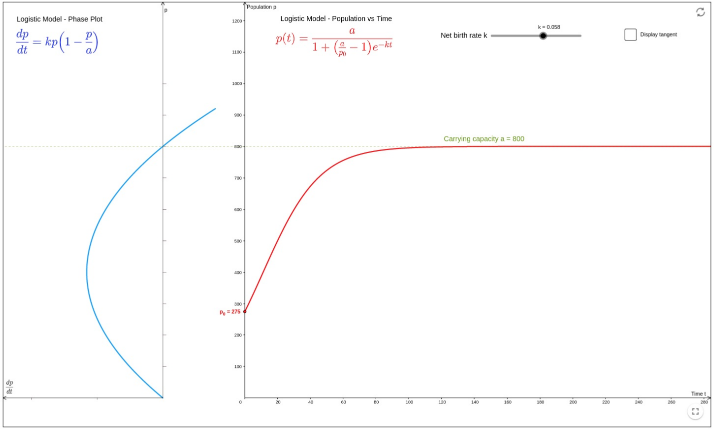
↳ $p(t)$ je rostoucí

↳ $0 < p < \frac{N}{2} \to \frac{dp}{dt}$ je rostoucí $\to p(t)$ je konvexní ①

↳ $\frac{N}{2} < p < N \to \frac{dp}{dt}$ je klesající $\to p(t)$ je konkávní ②

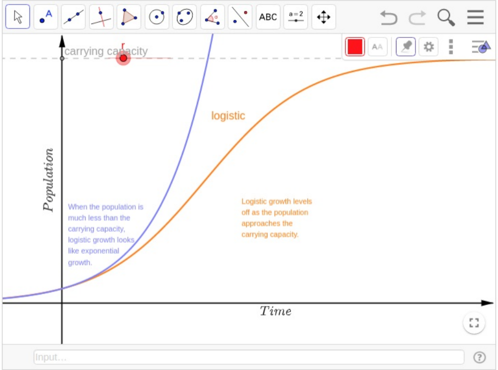
Logistický model III

https://www.geogebra.org/m/BTo0Ux6s



Logistický model IV – srovnání s exponenciálním

https://www.geogebra.org/m/xeaQ7m8C



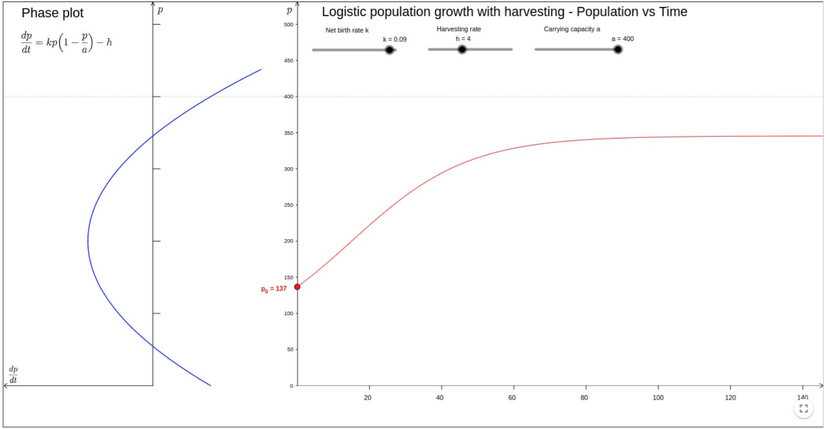
$$\lim_{N\to\infty} kp\left(1-\cancel{\frac{p}{N}}^{\,0}\right) = kp(1-0) =$$

$$= k\cdot p$$

Logistický model V – rozšíření

https://www.geogebra.org/m/ZeEbVDfN

h = konstantní výlov



S-I-R model I

[neštovice, spalničky]

- jednoduchý model šíření nemocí

susceptible

$S(t)$ = počet nenakažených

infectious

$I(t)$ = počet infetčních

recovered / removed

$R(t)$ = „počet zotavených"

$$S \to I \to R$$

$\forall t: \quad S(t) + I(t) + R(t) = \underline{N}$

CELKOVÝ POČET JEDINCŮ

S-I-R model II

$S \to I \to R$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Parametry modelu:

$\alpha,\beta > 0$

α = míra nakažlivosti

β = „rychlost zotavení"

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha \cdot S \cdot I$$

[$S(t)$ je nerostoucí]

$$\frac{dI}{dt} = +\alpha \cdot S \cdot I - \beta \cdot I$$

[$R(t)$ je neklesající]

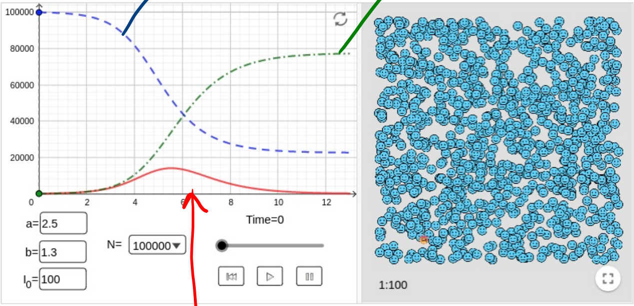
$$\frac{dR}{dt} = +\beta \cdot I$$

S-I-R model III – řešení

https://www.geogebra.org/m/utbemrca

S(t)

R(t)



I(t)

S-I-R model IV – rozšíření

Rozšíření:

- možnost znovu se nakazit (př. SIRS)
- inkubační doba (př. SEIR)
- mateřská imunita (př. MSIR)
- podpora přenašečů (př. SIR/C)

https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
https://koronahra.cz/about

Model predátor – kořist I

Lotka-Volterra – předpoklady

- kořist má vždy dostatek potravy
- potravou predátora je pouze kořist
- rychlost růstu populace je úměrná její velikosti
- predátoři mají neomezený apetit
- žádné změny prostředí

EXPONENCIÁLNÍ RŮST ?

$L(t)$ = počet lišek v čase t

$Z(t)$ = počet zajíců v čase t

Model predátor – kořist II

Parametry modelu:

α rychlost rozmnožování zajíců

β koeficient lovu

γ úhyn lišek

δ růst populace lišek

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha \cdot Z - \beta \cdot Z \cdot L$$

$$\frac{dL}{dt} = -\gamma \cdot L + \delta \cdot Z \cdot L$$

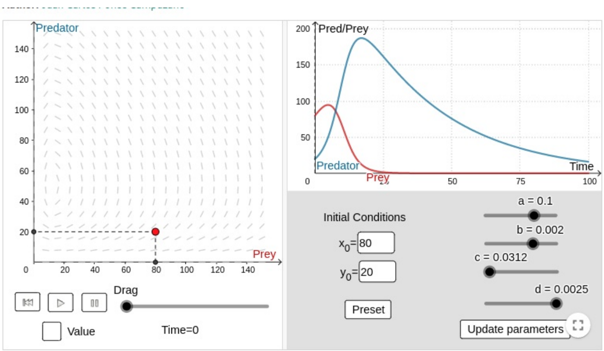
POZOROVÁNÍ:

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha \cdot Z$$ (bez lišek tj. $L = 0$)

→ EXPONENCIÁLNÍ RŮST

Model predátor – kořist III

https://www.geogebra.org/m/y746ry8g



Diferenciální rovnice – shrnutí

- využití pro modelování dějů
- řešení často netriviální, potřeba počítače

Co jsme použili:

- základy funkcí → tvorba modelu
- vlastnosti funkcí → analýze chování
- derivace → ZÁKLAD DIF. ROVNIC
- integrály → analytické řešení
- limity → asymptotické chování fcí $t \to \infty$ $(N \to \infty)$