Numerická derivace a integrace

Numerická derivace a integrace

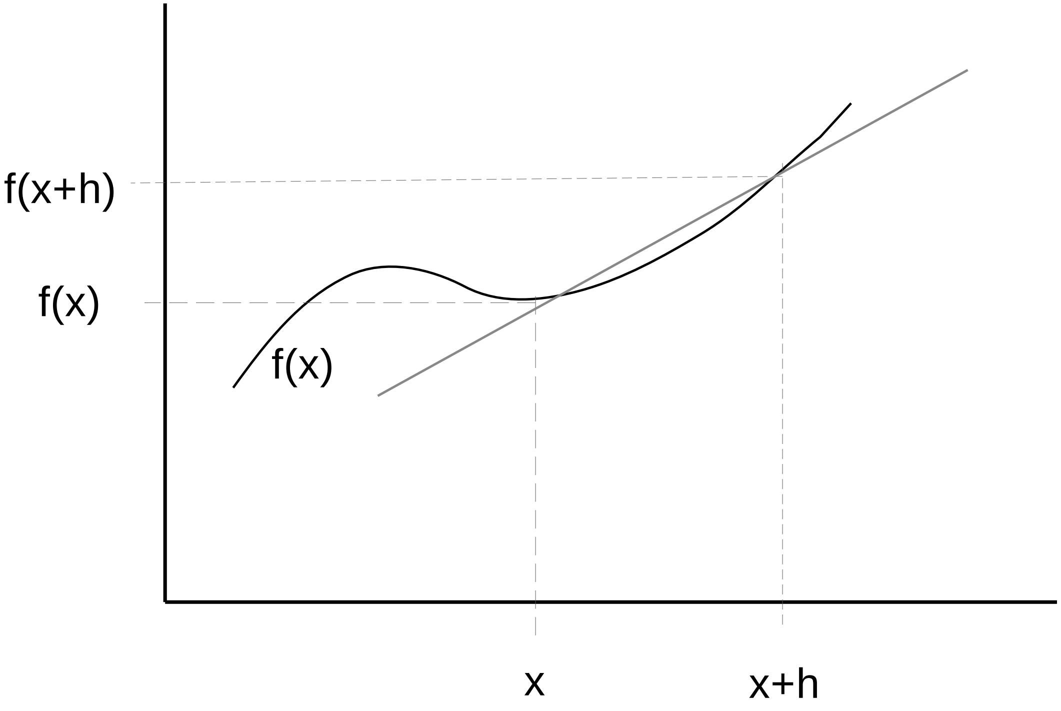
- Neznáme analytické vyjádření funkce, známe pouze některé funkční hodnoty.
- Funkce má složitý tvar, nejsme schopni vyjádřit její derivaci ani integrál.
- Metody odhadu derivace nebo integrálu funkce.
- Nabízí se metody Monte Carlo, zde si ukážeme jiné metody.

Numerická derivace

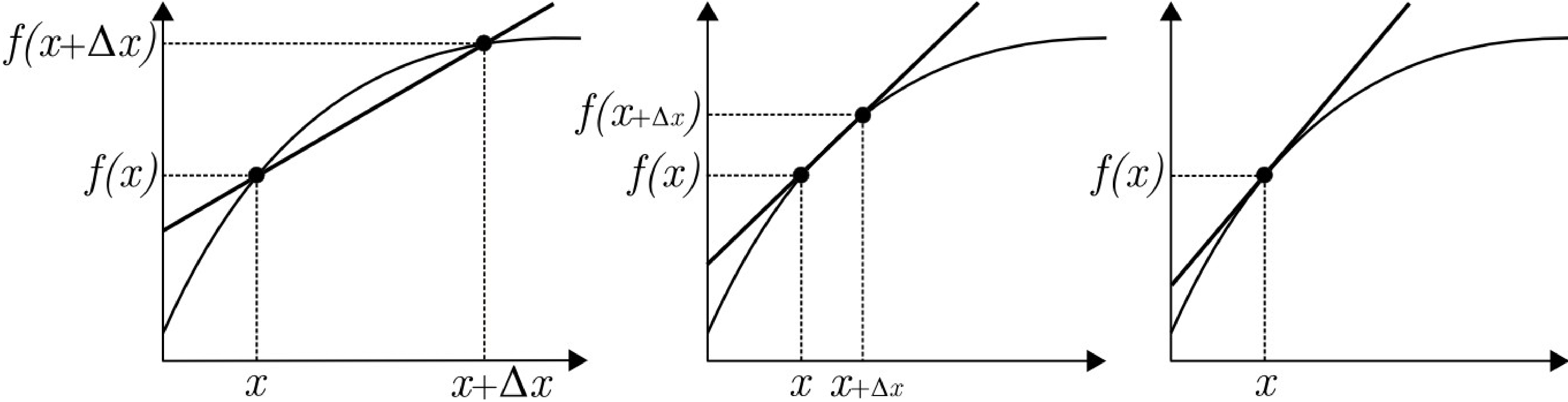
1) Vybere si dva body: ***x*** a ***x+h***
2) Přímka, která prochází body [x,f(x)] a [x+h, f(x+h)], svírá s osou x úhel, jehož tangens je definován.
3) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4) Při vhodném h přejde přímka do tečny ke grafu funkce f(x) v bodě
5) Obdržíme známou definici derivace funkce f(x) v bodě x.

$$f'(x)=\frac{\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)-f(x)}{h}$$



Numerická derivace



Numerická derivace

- Pro případ, že neznáme analytické vyjádření funkce, ale známe funkční hodnoty v bodech, použijeme aproximaci funkce polynomem. Tento polynom potom zderivujeme.
- Proč použijeme polynom?
  - Snadné derivování
  - Při vyšším stupni polynomu získáme poměrně přesnou aproximaci
- Nejběžnější je Lagrangeova interpolace polynomem

Lagrangeova interpolace

- Pro n bodů můžeme získat polynom stupně n-1
- Funkci f(x) nahrazujeme polynomem na úzkém intervalu <x_i, x_i + h>
- Polynom prvního stupně – grafem získané funkce je přímka má tvar:

$$L_1(x) = f(x_i)\frac{x-(x_i+h)}{-h} + f(x_i+h)\frac{x-x_i}{h}$$

- A derivace dané funkce podle x má tvar

$$L'_1(x) = \frac{1}{h}\left(f(x_i+h) - f(x_i)\right)$$

Lagrangeova interpolace

Pro derivaci funkce f(x) v bodech x_0 a x_1 platí:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

Příklad: Vypočítejte hodnotu první derivace funkce f(x) = 1/x v bodě x_0 = 2 pro h=0,2.

Lagrangeova interpolace – polynom 2. stupně

- Pokud budeme mít k dispozici 3 body [x_i -h, f(x_i-h)], [x_i, f(x_i)] a [x_i +h, f(x_i+h)] můžeme sestrojit polynom 2. stupně – grafem funkce bude parabola
- Derivací polynomu podle proměnné x a dosazením

  $x_0 = x_i - h$, $x_1 = x_i$, $x_2 = x_i + h$ dostaneme

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}\left(f(x_2) - f(x_0)\right)$$

Lagrangeova interpolace – druhá derivace

- Polynom 2. stupně můžeme podrobit 2. derivaci a po dosazení hodnot $x_0 = x_i - h$, $x_1 = x_i$, $x_2 = x_i + h$ dostáváme:

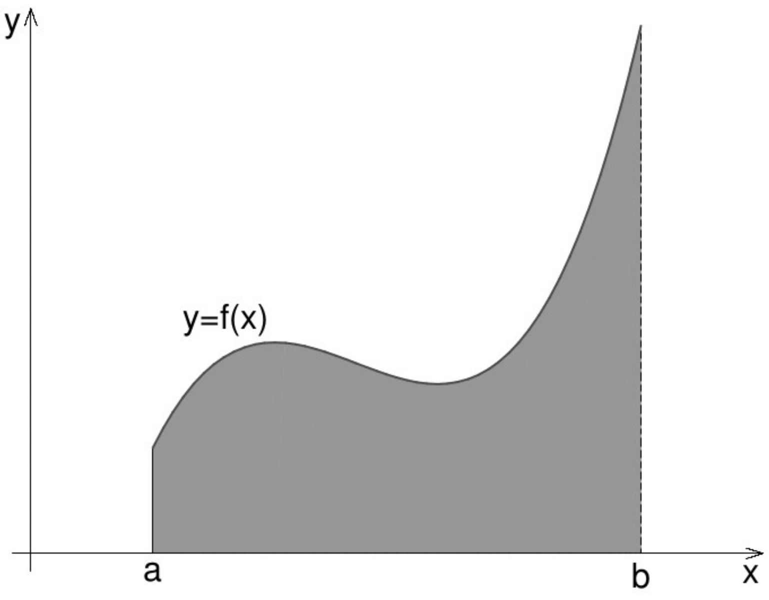
$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Numerická integrace

- Důvody použití numerické integrace
  - Integrál funkce neumíme vypočítat analyticky
  - Analytický výpočet je příliš pracný
  - Neznáme analytický zápis funkce, máme jen tabulku bodů

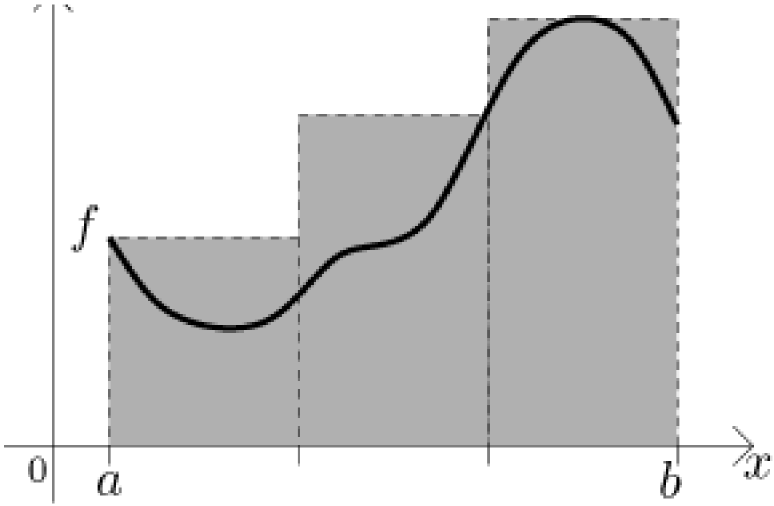
Numerická integrace

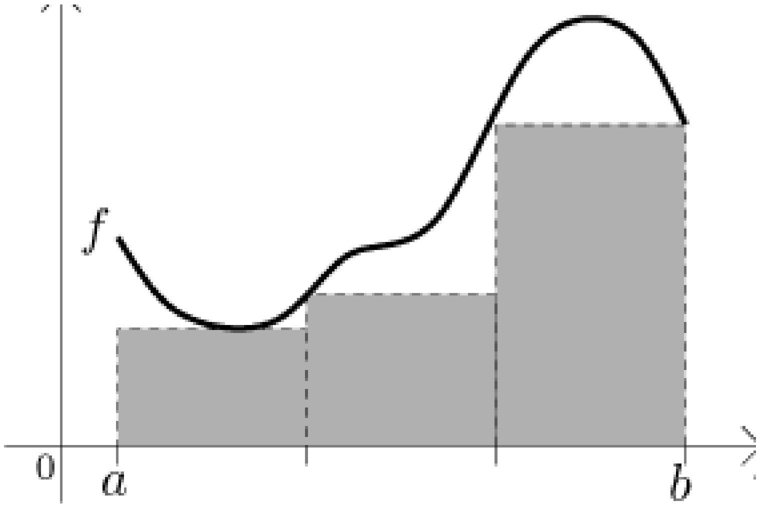
- Význam určitého integrálu



Numerická integrace

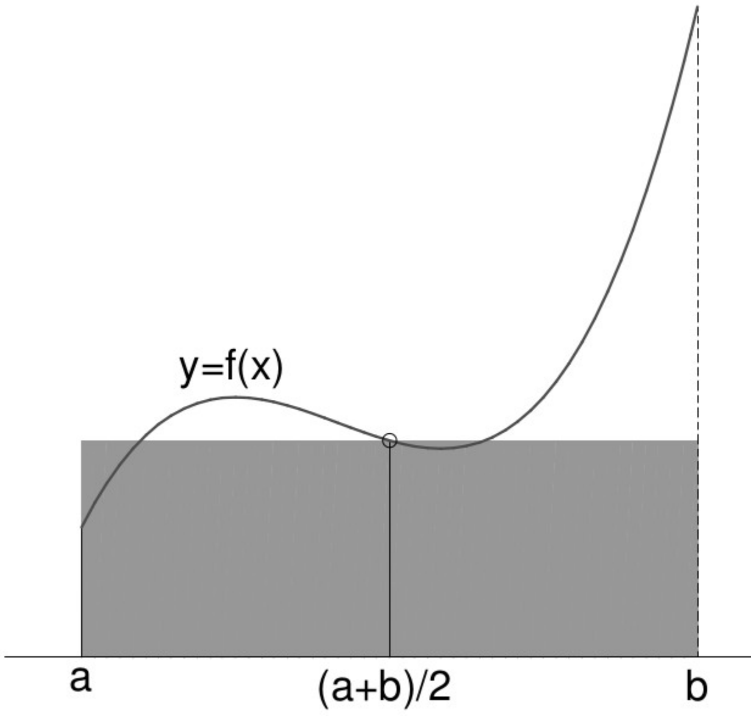
- Odvození Riemannova integrálu





Numerická integrace

- Obdélníková metoda



$$S=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=h.\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right)$$

Numerická integrace – obdélníková metoda

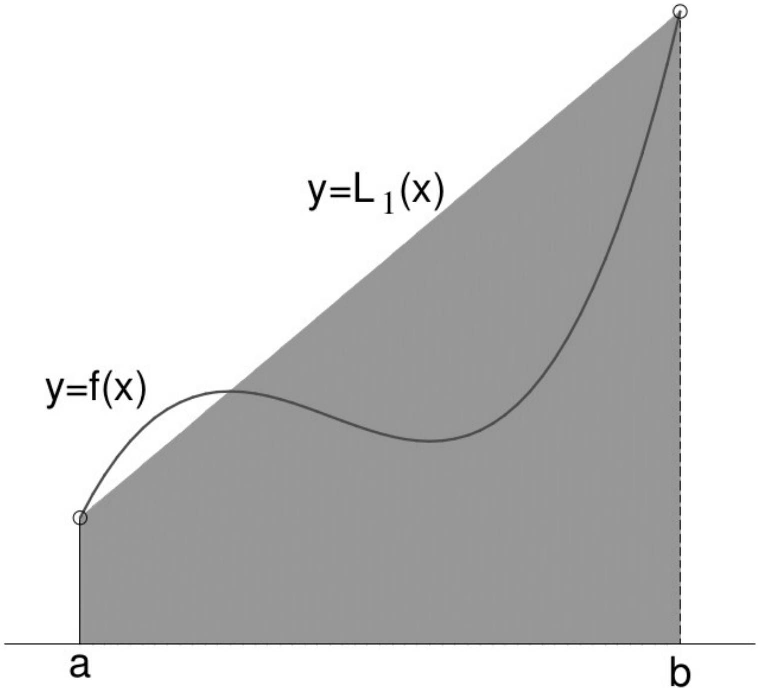
Příklad: Za použití obdélníkové metody vypočítejte integrál:

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\,dx$$

Pro dělení m = 4 a m = 8. Výsledky porovnejte s analyticky vypočítanou hodnotou, která je: 2,3504024

Numerická integrace

- Lichoběžníková metoda



$$S = \frac{v}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Numerická integrace

- Lichoběžníková metoda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

- Pro dělení m dostáváme výraz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{m-1})\right]+f(x_m)\right)$$

Numerická integrace – lichoběžníková metoda

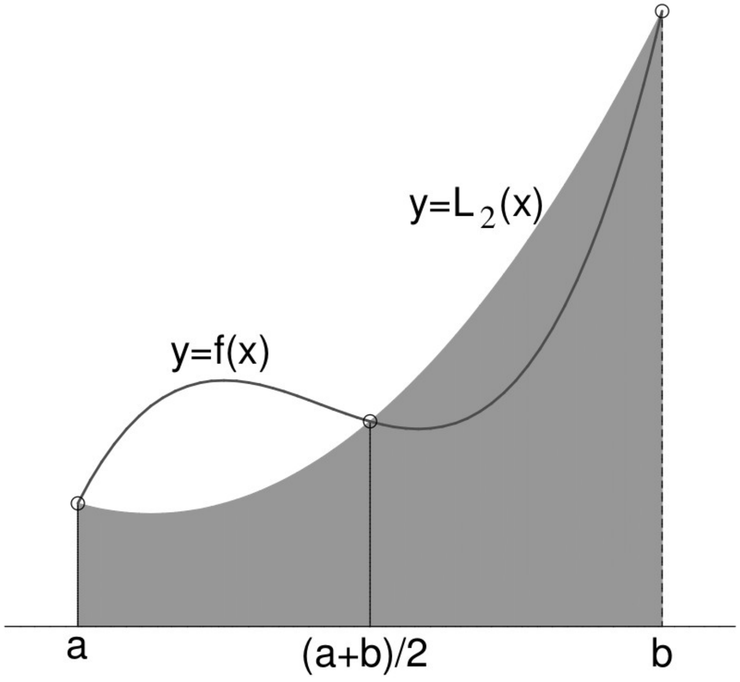
Příklad: Za použití lichoběžníkové metody vypočítejte integrál:

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx$$

Pro dělení m = 4 a m = 8. Výsledky porovnejte s analyticky vypočítanou hodnotou, která je: 2,3504024

Numerická integrace

- Sipsonova metoda – interpolační polynom 2. stupně L_2



Numerická integrace – Simpsonova metoda

$$L_2(x) = \frac{(x-x_i)^2}{2h^2}\left[f(x_i-h)-2f(x_i)+f(x_i+h)\right]+\frac{x-x_i}{2h}\left[f(x_i+h)-f(x_i-h)\right]+f(x_i)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

Sečtením výsledků přes všechny páry při dělení m dostaneme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{m-2})+4f(x_{m-1})+f(x_m)\right)$$

Numerická integrace – Simpsonova metoda

Příklad: Za použití Simpsonovy metody vypočítejte integrál:

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\,dx$$

Pro dělení m = 4 a m = 8. Výsledky porovnejte s analyticky vypočítanou hodnotou, která je: 2,3504024