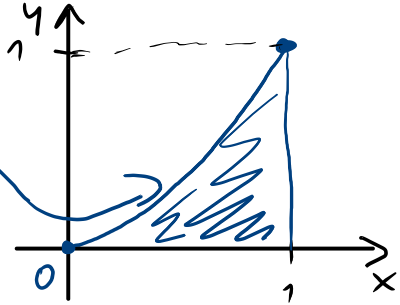
Reprezentace čísel v počítači

Tomáš Raček

Demotivační příklad I

$$\int_0^1 x^{30} \cdot e^{x-1}\,dx =$$

↳ plocha pod křivkou



$$x=0 \;\to\; x^{30}\cdot e^{x-1}\Big|_{x=0} = 0$$

$$x=1 \;\to\; x^{30}\cdot e^{x-1}\Big|_{x=1} = e^{0} = 1$$

$$0 < \int(\ldots) < 1$$

Demotivační příklad II – výpočet

$$J_{30} = \int_0^1 x^{30} \cdot e^{x-1}\,dx =$$

PER PARTES $\left[\int x \cdot e^x\,dx \right]$

APLIKACE $30\times$!

ZOBECNĚNÍ:

$$J_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\,dx = \left[x^n \cdot e^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 n \cdot x^{n-1} \cdot e^{x-1}\,dx =$$

$$= 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1}\,dx = 1 - n \cdot J_{n-1}$$ ← REKURENTNÍ VZTAH

POTŘEBUJEME

$$J_0 = \int_0^1 x^0 e^{x-1}\,dx = \int_0^1 e^{x-1}\,dx = \left[e^{x-1}\right]_0^1 = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e$$

Demotivační příklad III – počítač

$$J_{30} = 1 - 30 \cdot J_{29} =$$

$$= 1 - 30\left(1 - 29 \cdot J_{28}\right) =$$

$$= 1 - 30\left(1 - 29\left(1 - 28 \cdot J_{27}\right)\right) =$$

$$= \ldots$$

$$J_0 = 1 - 1/e$$

$$J_1 = 1 - 1 \cdot \left(1 - 1/e\right)$$

$$J_2 = \ldots$$

$$\vdots$$

$$J_{30} = ?$$

```python
J = {}
J[0] = 1 - 1 / math.e
J[0]
```

```
0.6321205588285577
```

```python
for n in range(1, 31):
    J[n] = 1 - n * J[n - 1]
```

```python
J[30]
```

```
-329676245560838б.5
```

?

$$0 < J_{30} < 1$$

Jednoduchá porovnání

```
1 + 1 == 2
```

True

```
1.5 + 0.5 == 2
```

True

```
0.1 + 0.2 == 0.3
```

False

CHYBA :(

→ V POČÍTAČI?

→ V PROGRAMOVACÍM JAZYCE?

→ JINDE?

Reprezentace čísel v počítači

Hodnoty je potřeba uložit v paměti.

NEOMEZENÝ ROZSAH $\times$ OMEZENÁ PAMĚŤ

(8 GB)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots \ldots\}$

$\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, 3/4, -8, \ldots\}$

Dvojková soustava I

$$(123)_{10} = 1\cdot\underbrace{10^2}_{} + 2\cdot\underbrace{10^1}_{} + 3\cdot\underbrace{10^0}_{}$$

ZÁKLAD

DESÍTKOVÉ

$$(1011)_2 = 1\cdot\underbrace{2^3}_{} + 0\cdot\underbrace{2^2}_{} + 1\cdot\underbrace{2^1}_{} + 1\cdot\underbrace{2^0}_{} = 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 =$$

$$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

DVOJKOVÉ

Dvojková soustava II

BINÁRNÍ REPREZENTACE $\longrightarrow$

STEJNÝ POČET MÍST $\longrightarrow$

0	0	0000
1	1	0001
2	10	0010
3	11	0011
4	100	0100
5	101	0101
6	110	0110
7	111	7 = 0111
8	1000	8 = 1000

⋮

15 = 1111

$2^4 = 16$

Reprezentace přirozených čísel I

→ TYPICKY 4 B (BYTY) = 32 BITŮ = $32 \times \{0, 1\}$

$$\underbrace{\boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid \ldots \mid 1}}_{32 \text{ míst}}$$

↳ 2^{32} možností = 4 294 967 296

(variace s opakováním)

Reprezentace přirozených čísel II – limity

4 bity

$$\begin{array}{r} 0010 \\ +\,0011 \\ \hline 0101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ +\,3 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ +\,0001 \\ \hline 1\,0000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ +\,1 \\ \hline 0 \end{array}$$

PŘETEČENÍ

ZÁVĚR:

→ V RÁMCI ROZSAHU OK

→ MIMO ROZSAH → NESMYSLY

```
4294967290
4294967291
4294967292
4294967293
4294967294
4294967295
0
1
2
3
<ipython-input-9-e6c1dbb77183>:5: RuntimeWarning: overflow encountered in uint_scalars
  value += step
```

Reprezentace reálných čísel I

→ VÝRAZNĚ KOMPLIKOVANĚJŠÍ

PROČ? $[0;1]$ obsahuje ∞ mnoho reálných čísel

→ OMEZENÍ SE NA ROZSAH NEPOMŮŽE

ZÁPIS:

$$(12{,}34)_{10} = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

$$(10{,}11)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 2 + 1/2 + 1/4 = 2{,}75$$

Reprezentace reálných čísel II

Vědecká notace

$(1234)_{10} = 1,234 \cdot 10^{3} = 1,234E3$

EXPONENT

$(10,11)_2 = \boxed{1,011} \cdot 2^{1} = 1,011E1$

Reprezentace reálných čísel

Pozn.:

$(4)_2 =$

00000100

př.

32 bitů

ZNAMÉNKO	MANTISA	EXPONENT
$\pm$	$1,011$	$\cdot\, 2^{4}$
1 bit	23 bitů	8 bitů

Reprezentace reálných čísel III – důsledky

OMEZENÍ

→ ROZSAH (EXPONENT)

→ PŘESNOST (MANTISA)

→ PŘESNĚ DOKÁŽU REPREZENTOVAT ČÍSLA, KT. LZE „SLOŽIT" Z MOCNIN 2

Př:

$0{,}75 = 0{,}5 + 0{,}25 = 2^{-1} + 2^{-2}$ ✓

$0{,}1 = ?$

Porovnávání reálných čísel

→ NELZE PŘÍMO POROVNÁVAT REÁLNÁ ČÍSLA

SPRÁVNĚ: POROVNÁNÍ NA BLÍZKOST

$x \stackrel{?}{=} y \longrightarrow |x-y| < \varepsilon$

definovaná přesnost

př. $\varepsilon = 10^{-6}$

```python
x = 0.1 + 0.2
y = 0.3
eps = 10 ** (-6)
```

```python
abs(x - y) < eps
```

```
True
```

```python
x == y
```

```
False
```

Demotivační příklad IV – analýza

$$J_n = 1 - n \cdot J_{n-1}$$

$J_0 = 1 - 1/e \rightarrow$ zatížено chybou

$$J_{30} = 1 - 30 \cdot J_{29} = 1 - 30(1 - 29 \cdot J_{28}) = \ldots$$

$\hookrightarrow$ výsledek obsahuje

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot J_0$$

$$30! \cdot J_0$$

$$30! \doteq 2{,}65 \cdot 10^{32}$$

Demotivační příklad V – řešení

$$J_n = 1 - n J_{n-1}$$

$$J_{n-1} = \frac{1 - J_n}{n}$$

Př.: $J_{35} = 0$

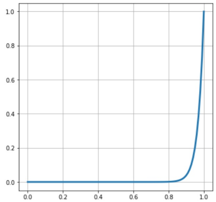
$$J_{34} = \frac{1 - J_{35}}{35} \rightarrow \text{dělit}$$

$\rightarrow$ původní chyba J_{35} se zmenšuje

```python
J = {}
J[35] = 0
for n in reversed(range(30, 36)):
    J[n - 1] = (1 - J[n]) / n
```

```python
J[30]
```

```
0.03127967462644882
```



Počet platných číslic

→ VELIKOST MANTISY

(VĚTŠINOU PŘESNOST CCA 7 NEBO 16 DESETINNÝCH MÍST)

```
1234567890 + 0.000001
```

```
1234567890.000001
```

```
1234567890 + 0.0000001
```

```
1234567890.0
```

Asociativita sčítání

UVAŽME PŘESNOST NA 3 PLATNÉ ČÍSLICE

$1{,}23 + 0{,}001 = 1{,}23$ → V RÁMCI ZVOLENÉ PŘESNOSTI JE SPRÁVNÝ VÝSLEDEK

ALE:

$$1{,}23 + (\underbrace{0{,}001 + \dots + 0{,}001}_{10\times}) = 1{,}23 + 0{,}01 = 1{,}24$$

$$\underbrace{((1{,}23 + 0{,}001) + \dots) \dots + 0{,}001}_{10\times} = 1{,}23$$

Asociativita sčítání II

Obecně neplatí:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

```
a = 0.1
b = 0.2
c = 0.3
```

```
a + b + c, (a + b) + c, a + (b + c)
```

```
(0.6000000000000001, 0.6000000000000001, 0.6)
```

↳ ZÁVISÍ-LI NA PŘESNOSTI, SČÍTÁME ČÍSLA OD NEJMENŠÍCH (V ABSOLUTNÍ HODNOTĚ).

Gaussova eliminace I

$$\begin{aligned} 10^{-10}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 0 & \underbrace{2-1\cdot 10^{10}} & \underbrace{3-1\cdot 10^{10}} \end{array}\right] \sim$$

UVAŽME PŘESNOST NA 7 PLATNÝCH ČÍSLIC

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{10} & -10^{10} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

Zk:

$10^{-10}\cdot 0 + 1 = 1$ ✓

$0 + 2\cdot 1 \neq 3$ ✗

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

Gaussova eliminace II – výběr pivota

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \text{PIVOT} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 10^{-10} & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-2\cdot 10^{-10} & 1-3\cdot 10^{-10} \end{array}\right] \sim$$

S VÝBĚREM PIVOTA

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Zk:

$$10^{-10}\cdot 1 + 1 = 1 \ \checkmark$$

$$1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3 \ \checkmark$$

Závěr

Počítač pro mnohé úlohy nutný

Konečná paměť → LIMITY REPREZENTACE

Doporučení: VYUŽÍVAT „OVĚŘENÁ ŘEŠENÍ"